

Clase 11: Separación de variables y series de Fourier.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

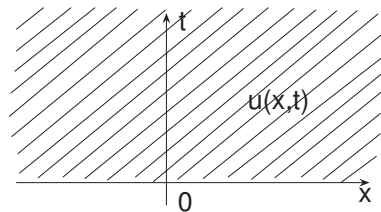
1. Introducción.

En esta clase iniciaremos el estudio de ED a derivadas parciales (EDDP), donde la función incógnita u depende de más de una variable y por lo tanto las derivadas que aparecen en la ED son derivadas parciales con respecto a las variables independientes (en aplicaciones a la física e ingeniería frecuentemente variables espaciales y el tiempo t). La ED generalmente viene acompañada por condiciones adicionales como condiciones de borde y condiciones iniciales.

Como introducción consideremos ahora una EDDP en una sola variable espacial x y el tiempo t ,

$$u_t - u_x - u = 0; \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde $u = u(x, t)$. La ED está planteada en la región sombreada del plano x, t en la figura siguiente:



Para encontrar soluciones particulares de (1) aplicamos la técnica de la separación de variables, es decir, buscamos soluciones $u(x, t)$ de (1) de la forma especial $u(x, t) = X(x)T(t)$, de tipo “variables separadas”. Escribimos

$$X'(x) = \frac{dX}{dx}, \quad T'(t) = \frac{dT}{dt}.$$

Sustitución de $u = XT$ en (1) da

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) - X'(x)T(t) - X(x)T(t) &= 0 \\ \implies \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{X'(x)}{X(x)} - 1 &= 0 \implies \frac{X'(x)}{X(x)} + 1 = \frac{T'(t)}{T(t)}. \end{aligned}$$

En la última ecuación el miembro izquierdo depende únicamente de x y el miembro derecho depende únicamente de t , y por lo tanto ambos miembros tienen que ser igual a una misma constante λ , es decir,

$$\frac{X'(x)}{X(x)} + 1 = \lambda, \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda; \quad -\infty < x < \infty \quad t \geq 0,$$

produciendo un sistema de dos ED ordinarias

$$X'(x) = (\lambda - 1)X(x), \quad T'(t) = \lambda T(t),$$

con soluciones generales

$$X(x) = Ae^{(\lambda-1)x}, \quad T(t) = Be^{\lambda t},$$

de modo que (con $C = AB$)

$$u(x, t) = Ce^{\lambda t}e^{(\lambda-1)x}; \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

De (2) tenemos $u_t - u_x - u = \lambda u - (\lambda - 1)u - u = 0$, de modo que $u(x, t)$ dada por (2) realmente es solución de (1). Tenemos entonces un conjunto infinito de soluciones que depende de dos parámetros λ, C . Si embargo estas “ ∞^2 soluciones” ni remotamente cubren todas las soluciones posibles. De hecho, para $f(\xi)$ diferenciable en $-\infty < x < \infty$ arbitraria,

$$v(x, t) = e^t f(x + t); \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

es una solución de (1) (¡verifique!). Variando en (3) la función $f(\xi)$ obtenemos una inmensa cantidad de soluciones adicionales, y todavía no tenemos todas las soluciones.

Las consideraciones anteriores sirven para ilustrar que las ED a derivadas parciales tienen en general demasiadas soluciones para poder esperar captarlas todas en una sola fórmula,

como es posible para ED ordinarias frecuentemente. El método de separación de variables ilustrado arriba es un método relativamente eficiente para encontrar una familia de soluciones tipo variable separadas. Como veremos, estas soluciones en muchos casos sirven de base para construir otras soluciones de suficiente generalidad para proporcionar las soluciones requeridas para un problema planteado dado.

Como ilustración consideremos ahora un problema de la conducción de calor en una barra delgada (es decir “undimensional”) que ocupa el intervalo $[0, l]$ del eje x . Sea $u = u(x, t)$ la temperatura en el lugar x de la barra y en el instante t . Supongamos que en el instante $t = 0$ se conoce la distribución de temperatura $u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq l$ en la barra (distribución de temperatura inicial) y que desde el instante $t = 0$ y adelante se mantiene los extremos $x = 0$ y $x = l$ en la temperatura cero. Matemáticamente el problema de determinar la distribución de temperatura en la barra para $t > 0$, esta descrita por

$$u_t = ku_{xx}; \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{condición inicial}), \quad (5)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0; \quad t \geq 0 \quad (\text{condiciones de borde}). \quad (6)$$

La EDDP (4) (en donde $k > 0$ es una constante material de la barra) es la ecuación de la conducción del calor en su forma undimensional (la forma 3-dimensional es $u_t = k\Delta u$ donde $\Delta = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2 + \partial/\partial z^2$ es el operador de Laplace). Presentaremos a continuación el procedimiento formal para la resolución de nuestro problema.

Aplicando separación de variables $u(x, t) = X(x)T(t)$ en (4) resulta

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda \quad \text{para cierta constante } \lambda, \quad (7)$$

(escribimos la constante como $-\lambda$ en lugar de λ para obtener las ecuaciones subsiguientes en la “forma acostumbrada”). La ecuación (4) tiene la solución trivial $u(x, t) = 0$ para todo x, t , la cual por supuesto no nos interesa: estamos buscando las soluciones no triviales y por lo tanto asumimos que $X(x)$ y $T(t)$ no son idénticamente cero. De (4), (6) tenemos

$$X(0)T(t) = 0, \quad t > 0, \quad T(t) \text{ no idénticamente cero} \implies X(0) = 0 \text{ y similarmente}$$

$$X(l)T(t) = 0, \quad t > 0 \implies X(l) = 0.$$

De esto y (7) obtenemos para $X(x)$ el problema

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad 0 \leq x \leq l \quad (8)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (9)$$

Los valores de λ tales que el problema (8), (9) tiene soluciones $X(x)$ no triviales se llaman los autovalores del problema, y las soluciones no triviales correspondientes se llaman autofunciones correspondientes. El problema (8), (9) es un ejemplo de un problema de autovalores y autofunciones (PAA). Veremos más adelante que los autovalores λ del problema (8), (9) forman un conjunto discreto e infinito de valores:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

con autofunciones correspondientes $X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$

donde observamos que $cX_n(x)$ ($c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria) también es autofunción correspondiente a $\lambda = \lambda_n$: observe que (8), (9) se cumple cuando en estas ecuaciones reemplazamos $X_n(x)$ por $cX_n(x)$ (consecuencia del hecho que tanto la ED (8) como las condiciones de borde (9) son homogéneas). En la ED para $T(t)$ contenida en (7) ponemos ahora $\lambda = \lambda_n$, obteniendo

$$T'_n(t) + k\lambda_n T_n(t) = 0,$$

con solución general (patrimonio cultural)

$$T_n(t) = A_n e^{-k\lambda_n t}, \quad A_n \text{ constante arbitraria.}$$

Tomando $A_n = 1$ tenemos las soluciones

$$T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Con las $X_n(t)$ y $T_n(t)$ tenemos ahora un conjunto infinito de funciones $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$, es decir

$$u_n(x, t) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-k\lambda_n t} \quad (12)$$

que satisfacen (4), (6).

Esto completa la primera parte del procedimiento: aplicando separación de variables llegamos al PAA (8), (9), obtuvimos los autovalores λ_n y autofunciones correspondientes $X_n(x)$, y con los λ_n obtuvimos los $T_n(t)$ y así finalmente las $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ que satisfacen (4) (6).

El próximo paso es observar que cualquier combinación lineal

$$\sum_{n=1}^N c_n X_n(x) T_n(t) \text{ de } u_1(x, t), \dots, u_N(x, t) \quad (13)$$

también satisface (4), (6), como consecuencia del hecho de que la ED (4) y las condiciones de borde (CB) (6) son homogéneas (recomendamos al alumno la verificación de esta afirmación). Surge entonces la idea de obtener la solución del problema completo (4), (6) y (5) como una combinación lineal como en (13). Veremos más adelante que en general será necesario tomar todo el conjunto infinito $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots$ ($N \rightarrow \infty$) en cuenta para formar la combinación lineal, obteniéndose $u(x, t)$ en la forma de una serie infinita de funciones:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{l} x \right) e^{-k\lambda_n t}; \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

Para cumplir con (5), $u(x, 0) = f(x)$, vemos de (14) que es necesario que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \quad 0 \leq x \leq l \quad (15)$$

(bastaría que la serie infinita converja a $f(x)$ c.s. en $[0, l]$). La pregunta es entonces: ¿es posible determinar las constantes c_n de manera tal que se cumple (15)? Veremos más adelante que la respuesta es afirmativa para una amplia clase de funciones $f(x)$. Decimos que (15) es el desarrollo de $f(x)$ en serie de Fourier de senos en $0 \leq x \leq l$.

Suponiendo que este desarrollo es posible, el último paso es la determinación de los coeficientes de Fourier c_n en (15). Para eso tenemos un procedimiento general que explicaremos ahora en términos generales. Es fácil verificar directamente (¡Ejercicio recomendado!) que las $X_n(x)$ forman un sistema ortogonal en $0 \leq x \leq l$ en el sentido que

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad \text{si } m \neq n \quad (16)$$

(para la verificación es útil la fórmula $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, y que además

$$\int_0^l [X_n(x)]^2 dx = \frac{l}{2} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

De (15) tenemos formalmente, para n fijo arbitrario,

$$\int_0^l f(x) X_n(x) dx = \int_0^l X_n(x) \sum_{m=1}^{\infty} c_m X_m(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx \stackrel{(16)}{=} c_n \int_0^l [X_n(x)]^2 dx$$

(gracias a las relaciones de ortogonalidad (16) queda un solo término en la serie infinita)

$$\implies c_n = \frac{\int_0^l f(x)X_n(x)dx}{\int_0^l [X_n(x)]^2 dx}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

para el desarrollo en serie de Fourier $f(x) = \sum_{n=1}^m c_n X_n(x)$; $0 \leq x \leq l$, donde $\{X_n(x)\}$ es un sistema ortogonal en $[0, l]$. Aplicando (17) en (18) resulta para los $X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ que

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx; \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Luego de calcular los c_n de (19), sustitución de los c_n encontradas en (14) nos da la solución final del problema (4)-(6). Recordemos que el cómputo de las integrales (19) lo hacemos aplicando derivadas generalizadas.

Clase 12: Continuación.

Peter Hummelgens

16 de diciembre de 2006

1. Problemas de autovectores y autofunciones.

Para completar la discusión de la clase anterior nos falta explicar como se obtuvieron los autovalores autofunciones del PAA que surgió de la separación de variables. Cambiando la notación este PAA es

(I)

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0; \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(\ell) = 0. \quad (2)$$

Como el parámetro λ es real, hay 3 posibilidades: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ o $\lambda > 0$.

Caso $\lambda < 0$: podemos entonces escribir $\lambda = -\alpha^2$ para cierto $\alpha > 0$ y (1) es en este caso

$$u''(x) - \alpha^2 u(x) = 0,$$

con solución general (cultura general)

$$u(x) = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x)$$

y de (2) entonces $A = 0$ y luego $B \sinh(\alpha \ell) = 0 \implies B = 0$ (porque $\sinh \xi \neq 0$ si $\xi \neq 0$). Pero entonces $A = 0, B = 0 \implies u(x)$ es la solución trivial $u(x) = 0$ en $0 \leq x \leq \ell$, es decir para $\lambda < 0$ no hay soluciones no triviales, o en otras palabras: no hay autovalores $\lambda < 0$.

Caso $\lambda = 0$: Entonces (1) se reduce a $u''(x) = 0$ con solución general $u(x) = Ax + B$, y luego con (2) $B = 0$ y luego $A\ell = 0 \quad \ell \neq 0 \implies A = 0$. Nuevamente no hay solución no trivial, es decir, $\lambda = 0$ no es un autovalor.

Caso $\lambda > 0$: podemos entonces escribir $\lambda = \alpha^2$ para cierto $\alpha > 0$, y (1) da

$$u''(x) + \alpha^2 u(x) = 0,$$

con solución general (cultura general)

$$u(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x),$$

y luego (2) da $A = 0$ y luego $B \sin(\alpha \ell) = 0 \implies B = 0$ o $\sin(\alpha \ell) = 0$. Como descartamos $B = 0$ porque estamos buscando soluciones no triviales (ya tenemos $A = 0$), queda

$$\sin(\alpha \ell) = 0 \implies \alpha \ell = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pero $\alpha, \ell > 0 \implies n\pi > 0 \implies n > 0$ y queda únicamente $n = 1, 2, 3, \dots$, es decir, obtenemos $\alpha_n = \frac{n\pi}{\ell} \implies \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ ($n = 1, 2, \dots$) son los autovalores del PAA (1),(2).

Con $A = 0$ arriba, autofunciones correspondientes son

$$u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right); \quad 0 \leq n \leq \ell \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Queda completamente resuelto el PAA (I). Ya vimos que las $u_n(x)$ forman un sistema ortogonal en $[0; \ell]$.

Consideremos ahora el PAA

(II)

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0; \quad 0 \leq x \leq \ell \tag{3}$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(\ell) = 0. \tag{4}$$

Caso $\lambda < 0$: $\lambda = -\alpha^2$ ($\alpha > 0$) \implies (como antes) $u(x) = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x)$

$$\left. \begin{aligned} \implies u'(x) &= \alpha A \sinh(\alpha x) + \alpha B \cosh(\alpha x) \\ u'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \alpha B = 0, \quad \alpha \neq 0 \implies B = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \implies u(x) &= A \cosh(\alpha x), \quad u'(x) = \alpha A \sinh(\alpha x) \\ u'(\ell) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \alpha A = 0 \implies A = 0$$

\implies hay para $\lambda < 0$ únicamente la solución trivial \implies no hay autovalores $\lambda < 0$

Caso $\lambda = 0$:

$$\implies \left. \begin{aligned} u(x) = Ax + B &\implies u'(x) = A \\ u'(0) = 0 & \end{aligned} \right\} \implies A = 0$$

$$\implies \left. \begin{aligned} u(x) = B, \quad u'(x) = 0 \\ u'(\ell) = 0 \end{aligned} \right\} \implies B \text{ puede ser arbitrario ; } B \neq 0$$

$$\implies \lambda = 0 \text{ es un autovalor y } u_0(x) = 1 \text{ una autofunción correspondiente.} \quad (5)$$

Esto se ve directamente de (3), (4) también.

Caso $\lambda > 0$: $\lambda = \alpha^2$ ($\alpha > 0$) $\implies u(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$

$$\implies \left. \begin{aligned} u'(x) &= -\alpha A \sin(\alpha x) + \alpha B \cos(\alpha x) \\ u'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \alpha B = 0, \quad \alpha \neq 0 \implies B = 0$$

$$\implies \left. \begin{aligned} u(x) = A \cos(\alpha x), \quad u'(x) &= -\alpha A \sin(\alpha x) \\ u'(\ell) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \alpha A \sin(\alpha \ell) &= 0 \\ \alpha \neq 0 \text{ y exigir } A &\neq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\implies \sin(\alpha \ell) = 0 \implies (\text{como antes}) \alpha_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\implies \left. \begin{aligned} \text{autovalores } \lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \text{autofunciones correspondientes } u_n(x) &= \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Podemos tomar (5), (6) juntos, concluyendo:

$$\left. \begin{aligned} \text{autovalores } \lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ u_0(x) = 1, \quad u_n(x) &= \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Queda resuelta el PAA (II). Ejercicio recomendado: verifique que $u_0(x) = 1$, $u_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) forman un sistema ortogonal, es decir, verificar que

$$\int_0^{\ell} 1 \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \int_0^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\int_0^{\ell} \cos\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = 0, \quad \text{si } m \neq n$$

Verifique además que

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\ell \cos^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx &= \frac{\ell}{2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \int_0^\ell 1^2 dx &= \ell \end{aligned} \right\}$$

Sea ahora el PAA

(III)

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0; \quad -\ell \leq x \leq \ell \quad (8)$$

$$u(-\ell) = u(\ell), \quad u'(-\ell) = u'(\ell). \quad (9)$$

Caso $\lambda < 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda = -\alpha^2 (\alpha > 0) \implies u(x) &= A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x) \\ u(-\ell) &= u(\ell) \end{aligned} \right\}$$

$$\implies A \cosh(\alpha \ell) - B \sinh(\alpha \ell) = A \cosh(\alpha \ell) + B \sinh(\alpha \ell)$$

$$\implies 2B \sinh(\alpha \ell) = 0 \implies B = 0 \implies u(x) = A \cosh(\alpha x) \implies \left. \begin{aligned} u'(x) &= \alpha A \sinh(\alpha x) \\ u'(-\ell) &= u'(\ell) \end{aligned} \right\}$$

$$\implies \left. \begin{aligned} -\alpha A \sinh(\alpha \ell) &= \alpha A \sinh(\alpha \ell) \\ \alpha &\neq 0 \end{aligned} \right\} \implies -A = A \implies A = 0$$

\implies no hay autovalores $\lambda < 0$

Caso $\lambda = 0$:

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= Ax + B \\ u(\ell) &= u(-\ell) \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} -A\ell + B &= A\ell + B \\ -A\ell &= A\ell \\ \ell &\neq 0 \end{aligned} \right\} \implies -A = A \implies A = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \implies u'(x) &= B \\ u'(-\ell) &= u'(\ell) \end{aligned} \right\} \text{ se cumple para todo } B$$

$$\implies \lambda = 0 \text{ es autovalor con autofunción } u_0(x) = 1. \quad (10)$$

Caso $\lambda > 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda = \alpha^2 (\alpha > 0) \implies u(x) &= A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) \\ u(-\ell) &= u(\ell) \end{aligned} \right\}$$

$$\implies A \cos(\alpha \ell) - B \sin(\alpha \ell) = A \cos(\alpha \ell) + B \sin(\alpha \ell)$$

$$\implies 2B \operatorname{sen}(\alpha\ell) = 0 \implies B = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}(\alpha\ell) = 0,$$

Si $B = 0$, entonces

$$\left. \begin{aligned} u(x) = A \cos(\alpha x) &\implies u'(x) = -\alpha A \operatorname{sen}(\alpha x) \\ u'(-\ell) &= u'(\ell) \end{aligned} \right\}$$

$\implies \alpha A \operatorname{sen}(\alpha\ell) = \alpha A \operatorname{sen}(\alpha\ell)$, $\alpha \neq 0$ y exigir $A \neq 0 \implies \operatorname{sen}(\alpha\ell) = \operatorname{sen}(\alpha\ell) \implies$ no da restricción.

Si $\operatorname{sen}(\alpha\ell) = 0$, entonces $\alpha\ell = n\pi \implies \alpha = \frac{n\pi}{\ell}$; $n = 1, 2, 3, \dots$ (recuerde que $\alpha > 0$)

$$\left. \begin{aligned} \implies \text{autovalores } \lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{con autofunciones correspondientes } &\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \text{ y } \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Tomando (10), (11) juntos:

$$\left. \begin{aligned} \text{autovalores } \lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{con autofunciones } u_0(x) = 1, \quad \phi_n(x) &= \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \quad \psi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Queda resuelto el PAA (III). Ejercicio recomendado: Verifique que

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

es un sistema ortogonal en $[-\ell; \ell]$. El PAA (III) es diferente de los PAA (I), (II) en que en el problema (III) tenemos para $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ ($n \neq 0$) dos autofunciones correspondientes que son independientes. Cualquier combinación lineal de autofunciones correspondientes a un autovalor es también autofunción correspondiente al mismo autovalor. Por lo tanto las funciones

$$\begin{aligned} e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} &= \phi_n(x) + i\psi_n(x) \\ e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} &= \phi_n(x) - i\psi_n(x) \end{aligned}$$

Son autofunciones correspondientes a λ_n (para $n = 0$ resulta $u_0(x) = 1$ en ambos casos) Tenemos ahora un sistema de autofunciones complejas

$$\left\{ 1, e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} \mid n = \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \quad (13)$$

para el PAA (III) (los autovalores son los mismos). Veamos que es un sistema ortogonal en $[-\ell; \ell]$, donde para un sistema de funciones $\varphi_n(x)$ complejas en un intervalo $a \leq x \leq b$ entendemos que ortogonalidad significa

$$\int_a^b \varphi_m(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = 0 \quad \text{si } m \neq n \quad (14)$$

donde $\overline{\varphi_n(x)}$ es la conjugada compleja de $\varphi_n(x)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} e^{i\frac{m\pi}{\ell}x} e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} dx &= \int_{-\ell}^{\ell} e^{i\frac{m\pi}{\ell}x} e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} dx \\ &= \frac{1}{i\frac{\pi}{\ell}(m-n)} [e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)}] \\ &= \frac{2}{i\frac{\pi}{\ell}(m-n)} \text{sen}[(m-n)\pi] \\ &= 0 \end{aligned}$$

(aplicamos la fórmula de Euler), lo que teníamos que demostrar.

Más ejemplos de PAA se presentan en la guía de ejercicios resueltos del profesor P-F Hummelgens. Un fenómeno general en estos ejemplos es que los PAA producen sistemas ortogonales de autofunciones (que además son completos en un sentido que aclararemos más adelante). En lo que sigue formalizaremos los conceptos de sistemas ortogonales, series de Fourier, \dots etc, de un punto de vista más abstracto.

Clase 13: Continuación.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

1. Teoría L^2 de las series de Fourier.

Una idea importante en la discusión de PAA es la consideración de espacios vectoriales de funciones sobre un intervalo y la introducción de un producto interno entre las funciones, incorporando de esta manera aspectos del algebra lineal como autovectores, autovalores y ortogonalidad entre otros. Por ejemplo el PAA

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0; \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1)$$

$$u(0) = 0 \quad u(l) = 0 \quad (2)$$

es un problema de algebra lineal en el sentido siguiente. Sea el ODLCC $L = -d^2/dx^2$ definido sobre el espacio D_L de todas las $u \in C^2([0; l])$ tales que $u(0) = 0$, $u(l) = 0$. Dejamos al estudiante verificar (ejercicio simple pero recomendado) que D_L es un espacio vectorial de funciones sobre $[0; l]$ (subespacio lineal de $C^2(0; l)$), y que

$$L : D_L \longrightarrow C([0, 1])$$

es aplicación lineal. Todo el problema (1), (2) se reduce ahora en la ecuación

$$Lu = \lambda u; \quad u \in D_L, \quad (3)$$

una ecuación de autovalores y autofunciones como entendido en el algebra lineal.

Empezamos ahora el desarrollo abstracto. Sea $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $L^2(a; b)$ el espacio de todas las funciones complejas $f(x)$ definidas *c.s.* en (a, b) y tal que existe

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \quad (f \in L^2(a; b)). \quad (4)$$

Recordemos que identificamos funciones $f(x), g(x)$ en $(a; b)$ tal que $f(x) = g(x)$ c.s. en $(a; b)$. Demostraremos ahora que $L^2(a; b)$ es un espacio vectorial. Utilizamos la desigualdad

$$|\alpha + \beta|^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Tenemos $0 \leq (|\alpha| - |\beta|)^2 = |\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$

$$\implies 2|\alpha\beta| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 \quad (6)$$

luego $|\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha\beta| \stackrel{(6)}{\leq} 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$, lo que demuestra (5).

Ahora tenemos para $f, g \in L^2(a; b)$,

$$|f(x) + g(x)|^2 \stackrel{(5)}{\leq} 2(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$$

y existen

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx, \quad \int_a^b |g(x)|^2 dx,$$

lo que implica la existencia de $\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx$, es decir $f + g \in L^2(a; b)$. Como además es claro que $\lambda \in \mathbb{C}, f \in L^2(a; b) \implies \lambda f \in L^2(a; b)$, vemos que $L^2(a; b)$ es un espacio vectorial. De (6) tenemos también que

$$f, g \in L^2(a; b) \implies fg \in L^1(a; b). \quad (7)$$

Tomando para $(a; b)$ un intervalo acotado y $g(x) = 1$ en $(a; b)$, (7) implica que

$$L^2(a; b) \subset L^1(a; b) \text{ si } (a; b) \text{ acotado.} \quad (8)$$

Pero si $f(x) = 1/\sqrt{x}$ en $(0; 1)$, entonces $f \in L^1(0; 1)$ pero $f \notin L^2(0; 1)$ ya que $|f(x)|^2 = 1/x^2$ y $\int_0^1 1/x^2 dx$ no existe. Observe que $C([a; b]) \subset L^2(a; b)$.

Ejemplo 1. (a) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ en $1 \leq x < \infty$, entonces

$$\int_1^\infty |f(x)|^2 dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1 \implies f \in L^2(1; \infty)$$

(b) Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ en $0 < x < \infty$. Entonces $f \in L^1(0; \infty)$ (*¡Verifique!*) pero $f \notin L^2$ (*¡Verifique!*).

En $L^2(a; b)$ definimos ahora un producto interno (\cdot, \cdot) por

$$(f, g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx; \quad f, g \in L^2(a; b). \quad (9)$$

La integral existe ya que $\int_a^b |f(x)\overline{g(x)}|dx = \int_a^b |f(x)g(x)|dx$ existe porque $fg \in L^1(a; b)$ según (7). Dejamos al lector como ejercicio fácil (pero recomendado) verificar las propiedades siguientes

$$\begin{aligned} \overline{(f, g)} &= (g, f) \\ (\alpha f, g) &= \alpha(f, g) \\ (f, \alpha g) &= \overline{\alpha}(f, g) \\ (f + g, h) &= (f, h) + (g, h) \\ (f, g + h) &= (f, g) + (f, h) \end{aligned} \quad (10)$$

para $f, g, h \in L^2(a; b)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Además es claro que

$$\begin{aligned} (f, f) &= \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0, \quad f \in L^2(a; b), \\ (f, f) = 0 &\iff f(x) = 0 \text{ c.s. en } (a; b). \end{aligned} \quad (11)$$

El producto interno (\cdot, \cdot) induce en $L^2(a; b)$ una norma $\| \cdot \|$, definido por

$$\|f\| := \sqrt{(f, f)}, \quad f \in L^2(a; b) \quad (12)$$

(como $(f, f) \geq 0$ según (11), $\sqrt{(f, f)}$ es un número real y ≥ 0 para todo $f \in L^2(a; b)$), y también el concepto de ortogonalidad:

$$f \perp g \text{ (} f, g \text{ son ortogonales)} \iff (f, g) = 0 \text{ (} f, g \in L^2(a; b)) \quad (13)$$

o con más detalle

$$f \perp g \iff \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = 0, \quad (f, g \in L^2(a; b)). \quad (14)$$

Este es el concepto de ortogonalidad que ya introducimos anteriormente (Clase 11). Una Observación sobre la terminología: las reglas (10) son las mismas reglas que son válidas para

el producto interior $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$ para vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ y en \mathbb{R}^n dos vectores \vec{a}, \vec{b} tales que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ se llaman ortogonales, y $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ se llama la norma de \vec{a} (longitud de la flecha \vec{a}).

Como para vectores en \mathbb{R}^n tenemos la siguiente versión del teorema de Pitágoras:

$$f \perp g \implies \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad (f, g \in L^2(a; b)), \quad (15)$$

porque

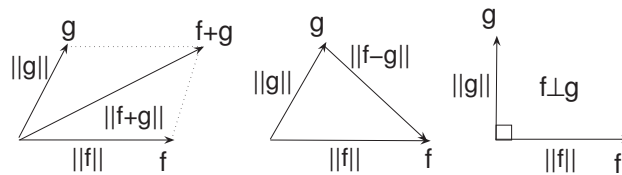
$$\begin{aligned} (f, g) = 0 \implies \|f + g\|^2 &\stackrel{(12)}{=} (f + g, f + g) \stackrel{(10)}{=} (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) \\ &\stackrel{(12)}{=} (f, f) + (g, g) = \|f\|^2 + \|g\|^2. \end{aligned}$$

Más generalmente (¡verifique!):

$\{f_1, \dots, f_n\}$ sistema ortogonal en $L^2(a; b)$ (es decir $f_i \perp f_j$ si $i \neq j$)

$$\implies \|f_1 + \dots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \dots + \|f_n\|^2, \quad \text{o} \quad \left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2. \quad (16)$$

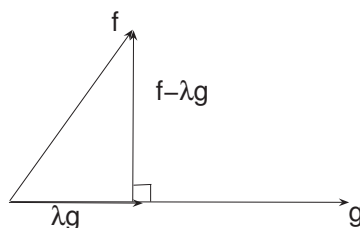
Hemos introducido para el espacio $L^2(a; b)$ varios conceptos ya conocidos del cálculo vectorial en \mathbb{R}^n . Es entonces natural asociar con una $f \in L^2(a; b)$ la imagen de una flecha con longitud $\|f\|$, como en las figuras siguientes



La norma $\| \cdot \|$ tiene las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} \|f\| \geq 0 \quad \text{y} \quad \|f\| = 0 &\iff f = 0 \quad (\text{es decir } f(x) = 0 \text{ c.s. en } (a; b)), \\ \|\lambda f\| &= |\lambda| \|f\| \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \quad f \in L^2(a; b)), \\ \|f + g\| &\leq \|f\| + \|g\| \quad (\text{desigualdad triangular}), \\ |(f, g)| &\leq \|f\| \|g\| \quad (\text{desigualdad de Schwarz}). \end{aligned} \quad (17)$$

Las primeras tres propiedades son evidentes. Demostraremos ahora la desigualdad de Schwarz. Sean $f, g \in L^2(a; b)$, $g \neq 0$ (la desigualdad es trivial si $g = 0$, siendo $(f, 0) = 0$, $f \in L^2(a; b)$), y calculemos la proyección ortogonal de f sobre g , como indicamos en la figura siguiente:



λg = proyección ortogonal de f sobre g .

$$\begin{aligned} \text{Tenemos } (f - \lambda g) \perp g &\stackrel{(13)}{\implies} (f - \lambda g, g) = 0 \implies (f, g) - \lambda(g, g) = 0 \\ &\implies \lambda = \frac{(f, g)}{(g, g)} \stackrel{(12)}{=} \frac{(f, g)}{\|g\|^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Ahora

$$\begin{aligned} f = (f - \lambda g) + \lambda g, \quad (f - \lambda g) \perp \lambda g &\stackrel{(15)}{\implies} \|f\|^2 = \|f - \lambda g\|^2 + \|\lambda g\|^2 \geq \|\lambda g\|^2 \\ &\implies \|f\| \geq \|\lambda g\| = |\lambda| \|g\| \stackrel{(18)}{=} \frac{|(f, g)|}{\|g\|}, \end{aligned}$$

lo que implica $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$. Demostraremos ahora la desigualdad triangular. Tenemos

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &\stackrel{(12)}{=} (f + g, f + g) = |((f + g, f + g))| \stackrel{(10)}{=} |(f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g)| \\ &\stackrel{(10)}{=} |(f, f) + (f, g) + \overline{(f, g)} + (g, g)| \stackrel{(12)}{\leq} \|f\|^2 + |(f, g) + \overline{(f, g)}| + \|g\|^2 \\ &= \|f\|^2 + 2|\operatorname{Re}((f, g))| + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|(f, g)| \\ \text{Schwarz} &\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\| \|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2 \\ &\implies \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \end{aligned}$$

listo. La fórmula (18) dice que

$$\frac{(f, g)}{\|g\|^2} g = \frac{\int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx}{\int_a^b |g(x)|^2 dx} g \quad (19)$$

es la proyección ortogonal de f sobre g y observamos que el cociente de integrales en (19) es similar a cociente de integrales que aparece en la fórmula general de coeficientes de Fourier en la fórmula (17) de la Clase 11:

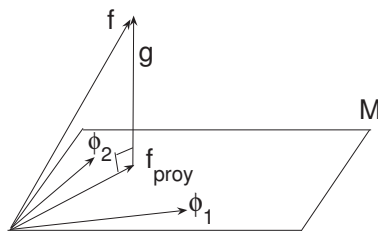
$$\lambda = \frac{(f, g)}{\|g\|^2}$$

podemos llamar el coeficiente de Fourier de f con respecto a g .

Consideremos ahora un sistema ortogonal (s.o.) $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ ($\phi_i \neq 0$) en $L^2(a; b)$. Este sistema genera un subespacio lineal $M \subset L^2(a; b)$ que consiste de todas las combinaciones lineales de la forma

$$\phi = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n; \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} \quad (\phi \in M). \quad (20)$$

Geoméricamente, con la analogía de considerar ϕ_1, \dots, ϕ_N como N vectores en un espacio \mathbb{R}^n ($n > N$), M es el plano N -dimensional generado por los N vectores ϕ_1, \dots, ϕ_N (2 vectores ortogonales en \mathbb{R}^3 generan un plano en \mathbb{R}^3 que contienen a los dos vectores, etc.) Sea $f \in L^2(a; b)$. Nos proponemos a calcular la proyección ortogonal de f sobre el “hiperplano” M en $L^2(a; b)$ generado por ϕ_1, \dots, ϕ_N . Geométricamente la situación es como en la figura siguiente (donde tenemos $N = 2$)



f_{proy} = proyección ortogonal de f sobre M .

Mostraremos que

$$f_{proy} = \sum_{n=1}^N \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \phi_n. \quad (21)$$

Primero observamos que el miembro derecho de (21) es de la forma (20) con

$$c_n := \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2}; \quad n = 1, \dots, N \quad (22)$$

(c_n es el coeficiente de Fourier de f con respecto a ϕ_n), de modo que pertenece a M . Entonces basta demostrar que

$$f - \sum_{n=1}^N \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \phi_n := g \perp M, \quad (23)$$

lo que es equivalente con $g \perp \phi_i$ para $i = 1, \dots, N$. Sea ϕ_m un elemento arbitrario fijo del *s.o.*, entonces

$$\begin{aligned} (g, \phi_m) &\stackrel{(10)(23)}{=} (f, \phi_m) - \sum_{n=1}^N \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} (\phi_n, \phi_m) = ((\phi_m, \phi_n) = 0 \text{ si } m \neq n) \\ &= (f, \phi_m) - \frac{(f, \phi_m)}{(\phi_m, \phi_m)} (\phi_m, \phi_m) = (f, \phi_m) - (f, \phi_m) = 0, \end{aligned}$$

y comprobamos que $g \perp \phi_m$ (hemos utilizado el mismo razonamiento que nos llevó a la formula (17) de la Clase 11). Como ϕ_m era arbitrario, concluimos que $g \perp \phi_i$, $i = 1, \dots, N$, es decir, $g \perp M$. Esto concluye la demostración de (21).

Los

$$c_n \stackrel{(22)}{=} \frac{\int_a^b f(x) \overline{\phi_n(x)} dx}{\int_a^b |\phi_n(x)|^2 dx},$$

se llaman los coeficientes de Fourier de f con respecto al *s.o.* $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$.

Clase 14: Continuación.

Peter Hummelgens

7 de enero de 2007

Encontramos en la clase anterior lo siguiente. Si $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ es un *s.o.* en $L^2(a; b)$ (los $\phi_i \neq 0$) y $f \in L^2(a; b)$ arbitrario, entonces

$$f_{proy} = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \quad \text{con} \quad c_n = \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \quad (n = 1, \dots, N), \quad (1)$$

es la proyección ortogonal de f sobre el subespacio lineal de M de $L^2(a; b)$ generado por ϕ_1, \dots, ϕ_N . El espacio M es N -dimensional y consiste en todas las combinaciones lineales

$$\psi = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \quad \text{con} \quad a_n \in \mathbb{C} \quad (\psi \in M). \quad (2)$$

Veamos algunas consecuencias de este resultado.

Llamando como antes $g := f - f_{proy} \stackrel{(1)}{=} f - \sum_{n=1}^N \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \phi_n$, tenemos $f = g + \sum_{n=1}^N \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \phi_n$ donde g es perpendicular con cada ϕ_n (porque $g \perp M$), por lo tanto perpendicular con todos los términos $\frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \phi_n$, ortogonales entre sí. Ahora con Pitágoras

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \|g\|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \|\phi_n\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \|\phi_n\|^2 \\ &\stackrel{(1)}{\implies} \sum_{n=1}^N \frac{|(f, \phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} \leq \|f\|^2, \quad f \in L^2(a; b) \end{aligned} \quad (3)$$

lo que es la desigualdad de Bessel (observe que en (3) la desigualdad se convierte en una igualdad cuando $f \in M$, es decir, $f_{proy} = f$).

Además, para $\psi \in M$ arbitraria dada por (2), tenemos $f - f_{proy} = g \perp (f_{proy} - \psi)$ (ya que $g \perp M$, $f_{proy} - \psi \in M$), luego

$$f - \psi = (f - f_{proy}) + (f_{proy} - \psi) \stackrel{\text{Pitágoras}}{\implies} \|f - \psi\|^2 = \|f - f_{proy}\|^2 + \|f_{proy} - \psi\|^2.$$

de donde vemos que para $\phi \in M$ la norma cuadrado $\|f - \psi\|^2$ alcanza su valor más pequeño cuando $\psi = f_{\text{proy}}$, es decir, cuando $a_n = c_n$; $n = 1, \dots, N$. En otras palabras

$$\left. \begin{aligned} \|f - \sum_{n=1}^N a_n \phi_n\| \text{ se } \underline{\text{minimiza}} \text{ cuando los } a_n \text{ son precisamente} \\ \text{los coeficientes de fourier } c_n \text{ de } f \text{ con respecto al s.o. } \{\phi_1, \dots, \phi_N\}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

es decir, “ la distancia más corta entre f y una $\psi \in M$ es la distancia ortogonal entre f y M ”, un resultado que luce evidente geoméricamente. La magnitud de la norma $\|f - \psi\|$ mide “la cercanía” de f y ψ como elemento de $L^2(a; b)$: mientras más pequeño $\|f - \psi\|$, mejor ψ se aproxima en norma a f . Podemos entonces reformular (4) diciendo: La mejor aproximación en norma de $f \in L^2(a; b)$ por un elemento de M

$$\left. \begin{aligned} \text{es } \psi = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \text{ donde los } c_n \text{ son los} \\ \text{coeficientes de Fourier de } f \text{ con respecto al s.o. } \{\phi_1, \dots, \phi_N\}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ejemplo 1. Se pide hallar los valores $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ que minimicen

$$\psi(\alpha, \beta) = \int_{-\pi}^{\pi} |\text{sen}(x) - \alpha - \beta x|^2 dx. \quad (6)$$

Podemos ubicar este problema en el contexto de la aproximación en $L^2(-\pi; \pi)$. Las funciones $\phi_1(x) = 1$, $\phi_2(x) = x$ evidentemente pertenecen a $L^2(-\pi, \pi)$ y

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_1(x)\phi_2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \implies \phi_1 \perp \phi_2,$$

es decir, $\{\phi_1, \phi_2\}$ es un s.o. en $L^2(-\pi, \pi)$. Además $f(x) = \text{sen}(x)$; $-\pi \leq x \leq \pi \implies f \in L^2(-\pi, \pi)$, y podemos escribir (6) como

$$\psi(\alpha, \beta) = \|f - \alpha\phi_1 - \beta\phi_2\|^2$$

y por (4) (o (5)) $\psi(\alpha, \beta)$ se minimiza cuando α, β son los coeficientes de Fourier de $\text{sen}(x)$ con respecto al s.o. ϕ_1, ϕ_2 . Entonces con (1),

$$\alpha = \frac{(f, \phi_1)}{\|\phi_1\|^2} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(x) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \frac{0}{2\pi} = 0,$$

$$\beta = \frac{(f, \phi_2)}{\|\phi_2\|^2} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(x) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx} = \frac{3}{\pi^2}.$$

La función $f_{\text{proy}}(x) = \frac{3}{\pi^2}x$ es la proyección ortogonal de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ sobre el subespacio lineal generado por 1, x , o $\frac{3}{\pi^2}x$ es la mejor aproximación en norma de $\operatorname{sen}(x)$ por una función de la forma $\alpha + \beta x$.

Verifiquemos la desigualdad de Bessel:

$$\frac{|(f, \phi_1)|^2}{\|\phi_1\|^2} + \frac{|(f, \phi_2)|^2}{\|\phi_2\|^2} = 0 + \frac{(2\pi)^2}{2\pi^2/3} = \frac{6}{\pi} \leq \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(x) dx = \pi.$$

Más ejemplos de este tipo están en la guía del Profesor Hummelgens.

Con el concepto de la norma en $L^2(a; b)$ podemos ahora definir los conceptos de convergencia de sucesiones y series infinitas en $L^2(a; b)$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^2(a; b)$ y $f \in L^2(a; b)$. Entonces definimos

$$f_n \longrightarrow f \text{ si } n \rightarrow \infty \stackrel{\text{def.}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0. \quad (7)$$

Expresamos $f \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ diciendo que f_n converge a f en la norma. Equivalentemente

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f \text{ si } n \rightarrow \infty \iff \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \longrightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty \quad (8)$$

(observe que $\|f - f_n\| \longrightarrow 0$ si y solo si $\|f_n - f\|^2 \longrightarrow 0$). De (8) vemos que la convergencia en norma están involucrados simultáneamente todos los valores de $f(x)$ y de los $f_n(x)$ sobre todo el intervalo $(a; b)$ en contraste con la convergencia puntual $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ si $n \rightarrow \infty$ que requiere que para cada $x \in (a; b)$ por separado (es decir, puntualmente) la sucesión de números $f_n(x)$ converge al número $f(x)$. Las dos nociones de convergencia no se implican mutuamente (¡construye ilustraciones de esta afirmación!).

La convergencia en norma de una serie infinita se define como la convergencia en norma de la sucesión de sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^N f_n = f \text{ en norma} \stackrel{\text{def.}}{\iff} \sum_{n=1}^N f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f \text{ si } N \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Sea un s.o. infinta $\phi_1, \dots, \phi_n, \dots$ (con todo $\phi_i \neq 0$) y se $f \in L^2(a; b)$. Aplicando la desigualdad de Bessel tenemos para todo N

$$\sum_{n=1}^N \frac{|(f, \phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} \leq \|f\|^2,$$

luego tomando el límite para $N \rightarrow \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} \leq \|f\|^2, \quad f \in L^2(a; b) \quad (10)$$

(la desigualdad de Bessel en forma más general). De (10) se puede demostrar que

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} \phi_n \text{ converge en norma para todo } f \in L^2(a; b) \\ \text{la suma de la serie es } f_{\text{proy}}, \text{ la proyección} \\ \text{ortogonal de } f \text{ sobre el subespacio lineal } M \subseteq L^2(a; b) \text{ generado por los } \phi_n. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Desde luego existe la posibilidad de que los ϕ_n no generan todo $L^2(a; b)$, es decir M no es $L^2(a; b)$ completo y los ϕ_n forman una base de M pero no de $L^2(a; b)$ (para generar todo $L^2(a; b)$ faltarían más vectores (funciones) de base). Definimos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{los } \phi_1, \dots, \phi_n, \dots \text{ forman un sistema ortogonal } \underline{\text{completo}} \text{ en } L^2(a; b) \\ \xleftrightarrow{\text{def}} M = L^2(a; b), \text{ es decir, cada } f \in L^2(a; b) \text{ es de la forma} \\ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \text{ donde los } c_n \text{ son los coeficientes de Fourier} \\ c_n = \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} \text{ de } f \text{ con respecto al s.o.} \end{array} \right\} \quad (12)$$

Que los c_n son los coeficientes de Fourier se puede verificar con el siguiente argumento que ya vimos antes. Si $f = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m$ (en norma), entonces para n fijo arbitrario,

$$(f, \phi_n) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m, \phi_n \right) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\phi_m, \phi_n) = c_n (\phi_n, \phi_n) = c_n \|\phi_n\|^2$$

porque $(\phi_m, \phi_n) \neq 0$ para $n \neq m$. Entonces

$$c_n = \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2}$$

como queremos. Puede demostrarse el siguiente criterio:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1, \dots, \phi_n, \dots \text{ es un s.o. completo} &\iff \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} = \|f\|^2 &\text{ para todo } f \in L^2(a; b). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

La igualdad en (13) se llama la igualdad de Parseval: para un s.o. completo la desigualdad de Bessel (9) se convierte en una igualdad. Partiendo de un s.o. ϕ_1, \dots, ϕ_n tenemos para todo $f \in L^2(a; b)$

$$\sum_{n=1}^N \frac{(f, \phi_n)^2}{\|\phi_n\|^2} \leq \|f\|^2$$

y agregando más vectores de base $\phi_{N+1}, \phi_{N+2}, \dots$ la suma a la izquierda aumenta (siempre siendo $\leq \|f\|^2$) hasta que alcanza su valor máximo posible $\|f\|^2$ cuando “ya no se puede agregar un vector ϕ más que sea perpendicular con todos los ϕ anteriores”.

Analogía en \mathbb{R}^k : elige $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^k$ ($\vec{v}_1 \neq \vec{0}$), luego $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$ ($0 \neq v_2$), \dots etc, y luego de agregar el último \vec{v}_k perpendicular a $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$ (todos mutuamente ortogonales), se ha obtenido una base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ de \mathbb{R}^k y cada $v \in \mathbb{R}^k$ puede escribirse como combinación lineal $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k$ (complete el razonamiento para obtener la “fórmula de Parseval” en este caso). Observe que podemos escribir (13) como $\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|^2 \|\phi_n\|^2 = \|f\|^2$.

Los s.o. concretos que ya encontramos en la resolución del PAA resultan ser completos. Es decir, resumiendo:

- (I) $\left\{ \text{sen} \left(\frac{n\pi}{\ell} x : n = 1, 2, 3, \dots \right) \right\}$ es un s.o. completo en $L^2(0; \ell)$, es decir, cada $f \in L^2(0; \ell)$ tiene un desarrollo $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$ (en norma), donde $\phi_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi}{\ell} x \right)$; $0 \leq x \leq \ell$.

Tenemos

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{\ell} x \right) dx; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y

$$\frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad f \in L^2(0, \ell) \quad (\text{Parseval}).$$

Verifiquemos las dos últimas fórmulas. Tenemos $\|\phi_n\|^2 = \int_0^{\ell} \text{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{\ell} x \right) dx = \frac{\ell}{2}$, luego con (1)

$$c_n = \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{\ell} x \right) dx.$$

Además $\|f\|^2 = \int_0^\ell |f(x)|^2 dx$, luego con (13)

$$\begin{aligned} \int_0^\ell |f(x)|^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, \phi_n)|^2}{\|\phi_n\|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\phi_n\|^2 = \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \\ \implies \frac{1}{\ell} \int_0^\ell |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \end{aligned}$$

listo.

(II) $\{1, \cos(\frac{n\pi}{\ell}x) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ es un s.o. completo en $L^2(0; \ell)$, es decir cada $f \in L^2(0, \ell)$ tiene un desarrollo $f = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n$ (en norma), donde $\psi_n(x) = \cos(\frac{n\pi}{\ell}x)$; $0 \leq x \leq \ell$.

Tenemos

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$\frac{1}{\ell} \int_0^\ell |f(x)|^2 dx = \frac{|c_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad f \in L^2(0; \ell) \quad (\text{Parseval}).$$

Verifiquemos las dos ultimas fórmulas. Tenemos $\|1\|^2 = \int_0^\ell dx = \ell$, por lo tanto

$$\frac{c_0}{2} = \frac{(f, 1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(x) dx \implies c_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) dx$$

y además

$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^\ell \cos^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{\ell}{2} \stackrel{(1)}{\implies} c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx.$$

Además con (13) y $\|\psi_n\|^2 = \frac{\ell}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell |f(x)|^2 dx &= \frac{|c_0|^2}{4} \ell + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\psi_n\|^2 = \frac{|c_0|^2}{4} + \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \\ \implies \frac{1}{\ell} \int_0^\ell |f(x)|^2 dx &= \frac{|c_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \end{aligned}$$

listo.

(III) $\{1, \psi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ es un s.o. completo en $L^2(-\ell, \ell)$, es decir cada $f \in L^2(-\ell, \ell)$ tiene un desarrollo

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \psi_n + b_n \phi_n] \text{ en norma,}$$

y tenemos

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad f \in L^2(-\ell, \ell) \text{ (Parseval),}$$

(¡Verifique!).

(IV) $\left\{ X_n(x) = e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$ es un s.o. completo en $L^2(-\ell, \ell)$, es decir, cada $f \in L^2(-\ell, \ell)$ tiene un desarrollo

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n X_n \text{ (en norma),}$$

y tenemos

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} dx; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

(¡Verifique!).

1. Terminología:

La serie de Fourier en (I) se llama serie de Fourier de senos de $f(x)$ en $(0; \ell)$, la serie en (II) se llama serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ en $(a; \ell)$, la serie en (III) se

llama serie de Fourier trigonométrica de $f(x)$ en $(-\ell, \ell)$ y la serie (IV) se llama serie de Fourier compleja de $f(x)$ en $(-\ell; \ell)$. Más generalmente, para $\phi_1, \dots, \phi_n, \dots$ un s.o. completo en $L^2(a; b)$, cada $f \in L^2(a; b)$ tiene un desarrollo

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \text{ en norma,}$$

llamado serie de Fourier de $f(x)$ con respecto al s.o. $\{\phi_n\}$

Observación 1. Si $f \in L^2(a; b)$, entonces podemos aplicar ambas series de Fourier de (I) y (II) (depende del problema en cuestión cual de los dos nos conviene). En cambio, en un intervalo simétrico $(-\ell; \ell)$ la serie de Fourier de una $f \in L^2(-\ell; \ell)$, consiste en general de términos con cosenos y senos simultáneamente (salvo en caso cuando $f(x)$ es par o impar, ver la próxima clase).

Clase 15: Continuación

16 de diciembre de 2006

Notación: en lugar de escribir $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$ (donde se entiende convergencia en norma) escribiremos también

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x); \quad a < x < b \quad (f \in L^2(a; b)) \quad (1)$$

si queremos indicar explícitamente la variable x . En cambio escribir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x); \quad a < x < b \quad (2)$$

significa convergencia puntual de la serie de Fourier a la función $f \in L^2(a; b)$. En lo anterior hemos visto que para un s.o. completo $\{\phi_n\}$ en $L^2(a; b)$ siempre podemos escribir (1). Pero si (2) también es válido es un asunto que consideraremos más adelante.

Sea $f \in L^2(-l; l)$ y supongamos que $f(x)$ es función par (es decir $f(-x) = f(x)$ c.s. en $(-l, l)$). Tenemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right]; \quad -\ell < x < \ell$$

Tenemos, según (III) de la clase anterior,

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx, \text{ pero } f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \text{ es } \underline{\text{impar}} \text{ sobre } -\ell < x < \ell$$

$$\Rightarrow b_n = 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ (si } f(x) \text{ par).}$$

Además $f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ es par sobre $-\ell < x < \ell$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Similarmente es fácil ver que cuando $f(x)$ es impar, entonces,

$$a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (f(x) \text{ impar}), \text{ y } b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

Entonces,

$$\begin{cases} f(x) \text{ par} \Rightarrow f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right); & -\ell < x < \ell, \\ a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} f(x) \text{ impar} \Rightarrow f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right); & -\ell < x < \ell, \\ b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx, \end{cases} \quad (4)$$

1. Series de Fourier de funciones periódicas.

Sea $p > 0$ arbitrario. Una $f(x)$ definida en \mathbb{R} se llama periódica de período p si y sólo si $f(x+p) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (o c.s. en \mathbb{R}). Las $X_n(x)$ definidas por (ver la clase 14, IV)

$$X_n(x) = e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}; \quad -\infty < x < \infty \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

son periódicas de período $p = 2\ell$ ya que

$$X_n(x+2\ell) = e^{i\frac{n\pi}{\ell}(x+2\ell)} = e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} e^{2in\pi} = e^{i\frac{n\pi}{\ell}x} \quad (e^{2in\pi} = 1 \text{ para todo entero } n, \text{ ver Mat. VI}).$$

Sea ahora $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ periódica de período $p = 2\ell$ y $a \in \mathbb{R}$ arbitrario. Para el intervalo de período $(a; a+2\ell)$. Podemos entonces escribir

$$\begin{cases} f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}; & -\infty < x < \infty; \\ c_n = \frac{1}{2\ell} \int_a^{a+2\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x} dx; & n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (5)$$

donde la integral no depende de la selección de a . En general, se toma $a = -\ell$ y la integral es $\int_{-\ell}^{\ell}$, pero esto no es necesario. De manera similar, para $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ periódica de período $p = 2\ell$, tendremos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \right]; \quad -\infty < x < \infty$$

con las fórmulas ya conocidas para los a_n, b_n . Esto es la serie de Fourier de la función periódica $f(x)$.

2. Convergencia puntual.

El problema de la convergencia puntual es importante para las aplicaciones en la física e ingeniería. Por ejemplo, en el problema de la conducción de calor considerado en la Clase 11, encontramos la solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\lambda_n t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right); \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0$$

Una solución en esta forma (como serie infinita) solamente tiene interés práctico si para cada $t > 0$ fijo el valor numérico de $u(x, t)$ en un punto x puede ser aproximado con cualquier precisión deseada tomando en cuenta un número suficiente de términos de la serie. Esto requiere de la convergencia puntual de la serie a $u(x, t)$ en el punto x .

El problema de la convergencia puntual es complicado. Nos restringimos aquí a mencionar sin demostración los siguientes criterios, donde supondremos que $f(x)$ es periódica:

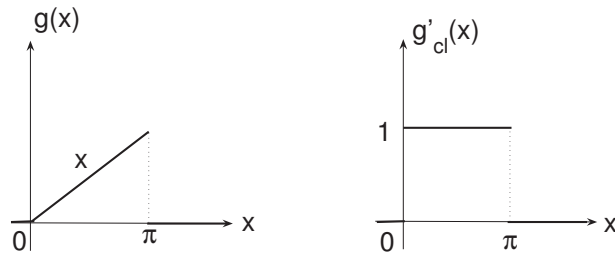
- a) Si $f(x)$ es C^1 a trozos, su serie de Fourier converge a $f(\xi)$ en los puntos ξ donde $f(x)$ es continua y converge al valor promedio $\frac{1}{2}[f(\xi^-) + f(\xi^+)]$ en puntos ξ donde $f(x)$ tiene un salto (observe que en todos los casos la serie de Fourier converge al valor promedio).
- b) Si $f \in C(\mathbb{R})$ y es C' a trozos, su serie de Fourier converge absolutamente y uniformemente a $f(x)$ en \mathbb{R} .

3. Algunos ejemplos.

Ejemplo 1. (a) Sea $f(x) = \frac{1}{2}x$; $0 < x < \pi$. Hallemos la Serie de Fourier de senos de $f(x)$ en $0 < \pi < x$,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx); \quad 0 < x < \pi$$

(aquí $l = \pi \Rightarrow \frac{n\pi}{l} = n$). Tenemos $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} x \text{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \text{sen}(nx) dx$ y calculamos esta integral aplicando derivadas generalizadas



$$g''_{cl}(x) = 0 \quad \text{c.s. en } \mathbb{R}$$

$$\pi b_n = \langle g, \phi \rangle \quad \text{con } \phi(x) = \text{sen}(nx),$$

$$\langle g''_{gen}, \phi \rangle = \langle g, \phi'' \rangle = -n^2 \langle g, \phi \rangle \quad (\text{ya que } \phi''(x) = -n^2 \text{sen}(nx) = -n^2 \phi(x))$$

$$\Rightarrow -n^2 \pi b_n = \langle g''_{gen}, \phi \rangle \quad (6)$$

$$\text{Ahora } g'_{gen}(x) = -\pi \delta_{\pi}(x) + g'_{cl}(x), \quad g''_{gen}(x) = g''_{cl}(x) + \delta(x) - \delta_{\pi}(x) - \pi \delta'_{\pi}(x)$$

$$g''_{gen}(x) = \delta(x) - \delta_{\pi}(x) - \pi \delta'_{\pi}(x)$$

$$\stackrel{(6)}{\Rightarrow} -n^2 \pi b_n = \langle \delta(x), \phi(x) \rangle - \langle \delta_{\pi}(x), \phi(x) \rangle - \pi \langle \delta'_{\pi}(x), \phi(x) \rangle =$$

$$= \phi(0) - \phi(\pi) + \pi \phi'(\pi) = \pi \phi'(\pi) = -n\pi \cos(n\pi) = -n\pi (-1)^n$$

$$\Rightarrow -n^2 \pi b_n = -n\pi (-1)^n \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx); \quad 0 < x < \pi \quad (7)$$

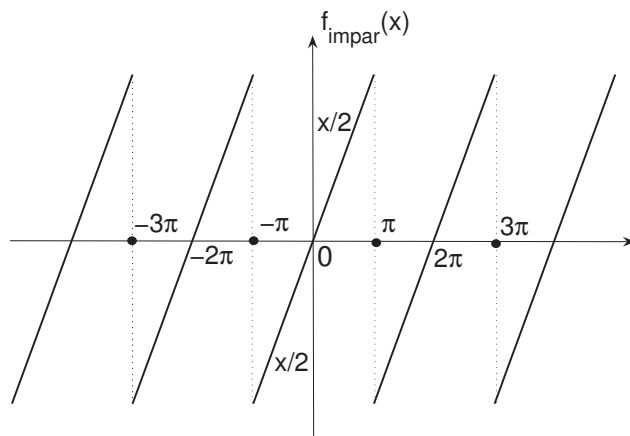
De (7) obtenemos según la igualdad de Parseval (ver I, clase 14)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

En la teoría de las series infinitas la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es un ejemplo estándar de una serie convergente: se demuestra que es convergente pero no se menciona el valor de su suma. Ahora sabemos que su suma es $\frac{\pi^2}{6}$. Sería algo complicado obtener esta suma sin la teoría de las series de Fourier.

(b) Consideremos la extensión de $f(x)$ a una función periódica impar $f_{\text{impar}}(x)$ con período 2π . La gráfica de $f_{\text{impar}}(x)$ es:



Como $f_{\text{impar}}(x)$ es función impar, su serie de Fourier contiene únicamente términos con senos (ver (4)),

$$f_{\text{impar}}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}(nx); \quad -\infty < x < \infty, \quad \text{con (ver 4)}$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_{\text{impar}}(x) \text{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx = b_n,$$

es decir, la misma serie (7) vale para $f_{\text{impar}}(x)$. Como $f_{\text{impar}}(x)$ es C^1 a trozos, el criterio (a) de la convergencia puntual nos dice que la serie converge puntualmente a $f_{\text{impar}}(x)$ donde ésta es continua. En particular, tomando $x = \frac{\pi}{2}$ tenemos con (7).

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots, \text{ o}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

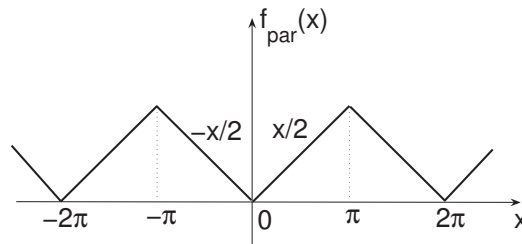
El valor promedio en cada punto de salto de $f_{\text{impar}}(x)$ es 0, por lo tanto la serie de Fourier converge a 0 en estos puntos, como indicado en la figura con un \bullet . En el caso particular que tenemos aquí esto es claro también directamente de la serie de Fourier misma: $\text{sen}(nx) = 0$ para $x = \pi$.

Por la convergencia puntual podemos ahora escribir (ver (2)).

$$f_{\text{impar}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx) \quad \text{c.s. en } \mathbb{R}, \quad \text{y en particular}$$

$$f(x) = \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx); \quad 0 \leq x < \pi$$

(c) La gráfica de la extensión par y 2π -periódica de $f(x)$, la cual llamamos $f_{\text{par}}(x)$, es



Como $f_{\text{par}}(x)$ es par, su SF solamente puede tener términos cosenos y un término constante posiblemente (ver (3)). Dejamos al lector verificar que

$$f_{\text{par}}(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]; \quad -\infty < x < \infty. \quad (8)$$

Luego la igualdad de Parseval da (ver (II) Clase 14)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

otra serie infinita junto con su suma (!), difícilmente obtenible sin la teoría de las SF. Como $f_{par}(x)$ es C^1 a trozos y continua, el criterio (b) de la convergencia puntual nos dice que la SF de $f_{par}(x)$ converge puntualmente a $f_{par}(x)$ en todo \mathbb{R} , de modo que además de (8) tenemos

$$f_{par}(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]; \quad -\infty < x < \infty,$$

en particular

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[(2n-1)x]; \quad -0 \leq x \leq \pi,$$

y tomando $x = 0$ resulta

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

otra (!) serie infinita junto con su suma.

(d) Finalmente consideremos la SF compleja de $f_{impar}(x)$,

$$f_{impar}(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}; \quad -\infty < x < \infty.$$

Tenemos, según (IV), Clase 14:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} dx = 0 \quad \text{y para } n \neq 0,$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} e^{-inx} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx - \frac{1}{4\pi} i \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= 0 - \frac{i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = 0 - \frac{i}{4\pi} 2 \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= -\frac{1}{2} i \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \operatorname{sen}(nx) dx = -\frac{1}{2} i b_n = -\frac{1}{2} i \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \end{aligned}$$

luego

$$f_{\text{impar}}(x) = \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}, \quad \text{c.s. en } \mathbb{R}.$$

Verifique que la igualdad de Parseval da nuevamente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ejemplo 2.

(a) Se pide hallar el desarrollo en SF de cosenos de $f(x) = 3 - 4 \cos(2x)$ en $0 < x < \pi$ ¡Que pregunta tan fácil!: $3 - 4 \cos(2x)$ ya es el desarrollo (la SF en este caso es una SF finita).

(b) Sea $g(x) = \text{sen}^3(x)$; $-\infty < x < \infty$. Se pide hallar la SF de $g(x)$. Como $g(x)$ es impar la SF contiene únicamente senos. Hallar los coeficientes de Fourier con la fórmula integral no es la manera más eficiente en este caso. Sea $z = \cos(x) + i \text{sen}(x)$, entonces según la fórmula de De Moivre

$$z^3 = \cos(3x) + i \text{sen}(3x) \implies \cos^3(x) + 3i \cos^2(x) \text{sen}(x) - 3 \cos(x) \text{sen}^2(x) = \cos(3x) + i \text{sen}(3x),$$

$$\implies \text{sen}(3x) = 3 \cos^2(x) \text{sen}(x) - \text{sen}^3(x) = 3(1 - \text{sen}^2(x)) \text{sen}(x) - \text{sen}^3(x)$$

$$\implies \text{sen}^3(x) = \frac{3}{4} \text{sen}(x) - \frac{1}{4} \text{sen}(3x)$$

es la SF deseada. Además vemos que

$$\cos^3(x) = \frac{3}{4} \cos(x) + \frac{1}{4} \cos(3x)$$

es el desarrollo en SF de $\cos^3(x)$.

Para más ejemplos ver la guía del Profesor P. F. Hummelgens.

Clase 16: Continuación.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

1. Aplicaciones de las SF.

Recordemos que en la Clase 11 ya resolvimos un problema de la conducción en una barra vía separación de variables y SF (de senos). Este fue nuestro primer ejemplo de un problema de valor inicial y en la frontera para la ecuación de calor (1-dimensional)

$$u_t - ku_{xx} = f(x, t) \quad (1)$$

donde $f(x, t)$ una función dada representando fuentes externas de calor (en el problema que resolvimos teníamos $f(x, t) = 0$ y la Ed era entonces homogénea). En esta clase consideramos además problemas asociados con la ED de Laplace (2-dimensional)

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad (2)$$

y la ecuación de ondas (1-dimensional)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) \quad (3)$$

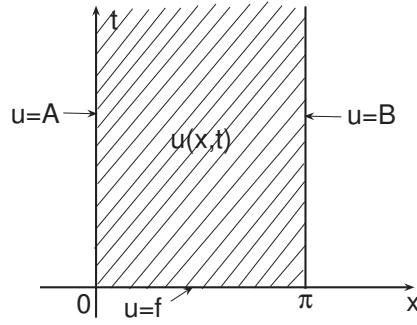
que describe por ejemplo la propagación de ondas transversales en una cuerda (siendo c la velocidad de propagación). La ED (2) surge en la hidrodinámica, la electrostática, etc.

Ejemplo 1. *Sea el problema de la conducción de calor con una barra 1-dimensional de longitud π , descrito por*

$$u_t = ku_{xx}; \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

$$u(0, t) = A, \quad u(\pi, t) = B; \quad t \geq 0 \quad (5)$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (6)$$



Como las condiciones de borde (5) (extremos a temperaturas constantes A y B distintos de 0) no son homogéneas, no podemos directamente aplicar separación de variables (poniendo $u(x, y) = X(x)T(t)$ obtenemos $X(0)T(t) = A$, $X(\pi)T(t) = B$, pero como $A, B \neq 0$ no obtenemos condiciones de borde para $X(x)$ en $x = 0$ y $x = \pi$). La idea es entonces convertir el problema en otro equivalente donde las condiciones de borde sí son homogéneas. Con este fin introducimos la función

$$v(x, t) = u(x, t) + \alpha x + \beta, \quad (7)$$

donde determinamos α, β de manera tal que $v(0, t) = 0$, $v(\pi, t) = 0$, $t \geq 0$ (condiciones de borde homogéneas). Tenemos $v(0, t) = 0 \implies 0 = A + B \implies \beta = -A$, luego $v(x, t) = 0 \implies 0 = \beta + \alpha\pi - A \implies \alpha = \frac{A-B}{\pi}$, de modo que (7) da

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{A-B}{\pi}x - A; \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \quad (8)$$

De (4) y (8) tenemos $v_t = u_t$, $v_{xx} = u_{xx} \implies v_t = kv_{xx}$, y de (6), (8) obtenemos $v(x, 0) = f(x) + \frac{A-B}{\pi}x - A$, de modo que nuestro problema (4)-(6) se convierte en

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}; & 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \\ v(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = 0; & t \geq 0 \text{ (condiciones de borde)} \\ v(x, 0) = f(x) + \frac{A-B}{\pi}x - A; & \text{(condición inicial)} \end{cases}$$

donde las condiciones de borde sí son homogéneas.

El nuevo problema ya resolvimos en la Clase 11, de modo que podemos escribir directamente la solución:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 t} \text{sen}(nx),$$

es decir, con (8)

$$u(x, t) = -\frac{A-B}{\pi}x + A + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 t} \text{sen}(nx) \quad (9)$$

con

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x) + \frac{A-B}{\pi} x - A \right] \text{sen}(nx) dx; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Observa que en (9) tenemos $e^{-kn^2t} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, de modo que la temperatura $u(x, t)$ tiende a un valor límite

$$u_{\infty}(x) = u(x, \infty) = A - \frac{A-B}{\pi} x \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

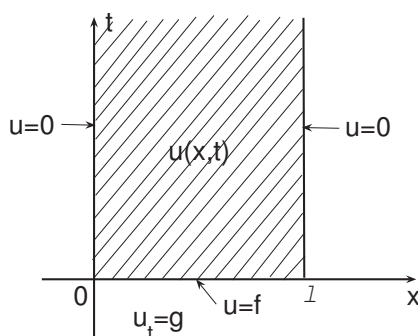
Ejemplo 2. Consideramos las oscilaciones transversales de una cuerda de longitud ℓ con sus extremos $x = 0, x = \ell$ fijos, dadas su posición inicial $f(x)$ y velocidad inicial $g(x)$.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}; \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad t \geq 0 \quad (10)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0; \quad t \geq 0 \quad (\text{condiciones de borde}) \quad (11)$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (\text{condición inicial}) \quad (12)$$

$$u_t(x, 0) = g(x); \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (\text{condición inicial}) \quad (13)$$



Sustituyendo $u(x, t) = X(x)T(t)$ en (10) (separación de variables) da

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda, \quad \text{una constante} \quad (14)$$

Luego con (11) resulta para $X(x)$ el

$$PAA \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; & 0 \leq x \leq \ell \\ X(0) = 0, & X(\ell) = 0 \end{cases}$$

ya resuelto en la Clase 11, con resultado:

$$\left. \begin{array}{l} \text{autovalores } \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \text{autofunciones } X_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right). \end{array} \right\} \quad (15)$$

Para $\lambda = \lambda_n$ tenemos de (14),

$$\left. \begin{array}{l} T_n''(t) + \lambda_n c^2 T_n(t) = 0, \quad \text{con solución general (poniendo } \alpha_n = n\pi/\ell) \\ T_n(t) = A_n \cos(\alpha_n ct) + B_n \text{sen}(\alpha_n ct), \quad \text{luego } T_n'(t) = -\alpha_n c A \text{sen}(\alpha_n ct) + \alpha_n c B \cos(\alpha_n ct). \end{array} \right\} \quad (16)$$

De (15), (16) tenemos funciones de $u_n(x, t)$ que satisfacen (10), (11) dados por

$$u_n(x, t) = \text{sen}(\alpha_n x)[A_n \cos(\alpha_n ct) + B_n \text{sen}(\alpha_n ct)]; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Como la ED (10) y las condiciones de borde son homogéneas, cualquier combinación lineal de las $u_n(n, t)$ también satisface (10), (11).

Buscamos ahora la solución de (10)-(13) en la forma

$$\left. \begin{array}{l} u(x, t) = \sum_{n=1}^a \text{sen}(\alpha_n x)[a_n \cos(\alpha_n ct) + h_n \text{sen}(\alpha_n ct)], \quad \text{entonces} \\ u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\alpha_n x)[- \alpha_n a_n c \text{sen}(\alpha_n ct) + \alpha_n b_n c \cos(\alpha_n ct)] \end{array} \right\} \quad (18)$$

De (12), (18) tenemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(\alpha_n x); \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (19)$$

y de (13), (18) tenemos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n c \text{sen}(\alpha_n x); \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (20)$$

Siendo entonces (19), (20) las SF de senos de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, tenemos (ver la Clase 14)

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx; \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ b_n = \frac{2}{c\alpha_n \ell} \int_0^{\ell} g(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx; \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right\} \quad (21)$$

Sustitución de (21) en la primera relación de (18) da la solución formal del problema (10)-(13) en forma de SF.

Extendiendo $f(x)$, $g(x)$ a todo \mathbb{R} como funciones impares y periódicas de período 2ℓ (extendiendo de la misma manera la solución $u(x, t)$) podemos escribir la solución formal en forma más conveniente (sin series) como (solución de D’Alambert)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds; \quad -\infty < x < \infty \quad t \geq 0$$

(ver ejemplo 26 de la sección 5 de la guía del Prof. Hummelgens).

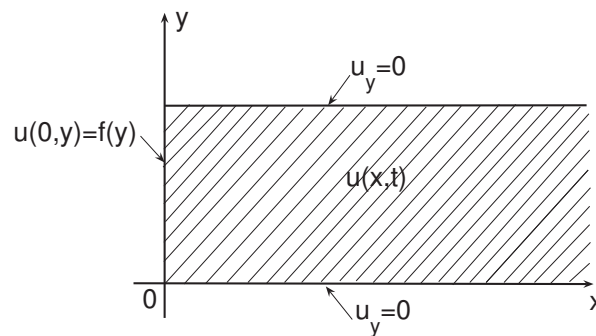
Ejemplo 3. : Sea el problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \pi \tag{22}$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, \pi) = 0; \quad 0 \leq x < \infty \tag{23}$$

$$u(0, y) = \left| \frac{\pi}{2} - y \right| = f(y); \quad 0 \leq y \leq \pi \tag{24}$$

$$u(x, y) \text{ acotada en } 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \pi. \tag{25}$$



Separación de variables en (22) da

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda. \tag{26}$$

De (26) (la ED para $Y(y)$), (23) obtenemos el PAA

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0; & 0 \leq y \leq \pi \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

con soluciones (ver la Clase 12)

$$\left. \begin{array}{l} \text{autovalores } \lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \text{autofunciones } Y_0(y) = 1, \quad Y_n(y) = \cos(ny) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{array} \right\} \tag{27}$$

Para $\lambda = 0$ tenemos de (26) que $X''(x) = 0 \implies X(x) = Ax + B$, donde necesariamente $A = 0$ ya que $X(x)$ tiene que ser acotada en $0 \leq x \leq \infty \implies X(x) = B$ y tomando $B = 1$ resulta $X_0(x) = 1$. Para $\lambda = \lambda_n$ tenemos de (26) que

$$X_n''(x) - n^2 X_n(x) = 0 \implies X_n(x) = A_n e^{-nx} + B_n e^{nx},$$

donde necesariamente $B_n = 0$ para que X_n sea acotado en $0 \leq x < \infty \implies$ tomamos $X_n(x) = e^{-nx}$. En resumen:

$$X_0(x) = 1, \quad X_n(x) = e^{-nx} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

y de esto y (27) obtenemos las

$$u_0(x, y) = 1, \quad u_n(x, y) = \cos(ny)e^{-nx} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (28)$$

que todos satisfacen (22), (23), (24). Cualquier combinación lineal de ellas también satisfacen (22), (23), (24) porque la ED (22) y las condiciones de borde (23) son homogéneas.

Buscamos la solución de (23)-(25) en la forma

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ny)e^{-nx}; \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \pi. \quad (29)$$

De (24), (28) tenemos

$$f(y) = \left| \frac{\pi}{2} - y \right| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ny) \quad (30)$$

es decir, los a_0, a_n son los coeficientes de Fourier de $f(y)$ en su SF de cosenos. De la Clase 14 sabemos que

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\pi}{2} - y \right| dy \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\pi}{2} - y \right| \cos(ny) dy, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Calculando las integrales usando derivadas generalizadas encontramos (*¡verifique!*)

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \begin{cases} 0; & n \text{ impar} \\ \frac{1}{\pi m^2} [1 - (-1)^m]; & n = 2m \quad (m = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

de donde con (29) tenemos

$$u(x, y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m]}{m^2} e^{-2mx} \cos(2my)$$

o

$$u(x, y) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} e^{-2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} m^2 e^{-4nx} \cos[(2n+1)y]; \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Como la extensión par con período 2π de $f(y)$ a $-\infty < y < \infty$ es continua y C^1 a trozos, la serie converge a $u(x, y)$ en $0 \leq y \leq \pi$ para todo $x \in [0; \infty)$ fijo.

Hemos dado tan solo algunos ejemplos básicos ya que el tiempo no alcanza para dar más ejemplos en clase. Para más ejemplos ver la guía del Profesor P. F. Hummelgens, donde también aparecen ejemplos donde la ED y/o las condiciones de borde son no homogéneas. Estos ejemplos son importantes para las aplicaciones. Confiamos en que el estudiante sea capaz de entender los ejemplos de la guía a su propia cuenta.

Clase 17: La Transformación de Fourier.

Peter Hummelgens

12 de diciembre de 2006

1. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ (es decir existe $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$). Podemos asociar a $f(x)$ una nueva función $\hat{f}(\omega)$ de la variable real ω , llamada la transformada de Fourier de f , definida por

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx; \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (1)$$

La integral converge absolutamente porque

$$|e^{-i\omega x} f(x)| = |e^{-i\omega x}| |f(x)| = |f(x)|$$

y existe $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$; en particular vemos que

$$\left. \begin{array}{l} |\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx; \quad -\infty < \omega < \infty, \\ \text{de modo que } \hat{f}(\omega) \text{ es acotada en } -\infty < \omega < \infty. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Más aún se puede demostrar que

$$\hat{f} \in C(\mathbb{R}) \text{ y } \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0 \quad (\text{lema de Riemman-Lebesgue}). \quad (3)$$

(observe que $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty}$ significa $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty}$). Utilizamos la notación $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega)$ para indicar que $\hat{f}(\omega)$ es la transformada de Fourier (TF) de $f(x)$.

Un ejemplo más adelante ilustrará que $f \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ (es decir la TF de una

$f \in L^1(\mathbb{R})$ nos puede llevar fuera de $L^1(\mathbb{R})$). Tenemos el resultado:

$$\left. \begin{aligned} f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) &\implies f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega \text{ c.s. en } \mathbb{R} \\ \text{(f\u00f3rmula de inversi\u00f3n). Cuando } f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ y } f \in C(\mathbb{R}), \text{ entonces} \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega; \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

El resultado (4) describe la situaci\u00f3n donde podemos aplicar la TF inversa $\hat{f}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(x)$ en $L^1(\mathbb{R})$

Una funci\u00f3n $f(x)$ de soporte compacto evidentemente pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, y para una f tal podemos escribir TF como corchete:

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \langle f(x), e^{-i\omega x} \rangle_x \quad (5)$$

Como hicimos con la TL, podemos observar que el corchete tiene sentido cuando f es una distribuci\u00f3n $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de soporte compacto y tomar (5) como definici\u00f3n de la TF de una distribuci\u00f3n de soporte compacto (m\u00e1s adelante presentaremos una definici\u00f3n alternativa para la TF de una cierta clase de distribuci\u00f3n). As\u00ed obtenemos con (5)

$$\left. \begin{aligned} \delta_a(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \langle \delta_a(x), e^{-i\omega x} \rangle_x = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega a}, \\ \text{en particular } \delta(x) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es de soporte compacto, tambi\u00e9n lo son $f'_{gen}, f''_{gen}, \dots$ y tenemos seg\u00fan (5)

$$\begin{aligned} f_{gen}^n(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \langle f_{gen}^n(x), e^{-i\omega x} \rangle_x &= \frac{1}{2\pi} (-1)^n \langle f(x), (-i\omega)^n e^{-i\omega x} \rangle_x \\ &= (i\omega)^n \frac{1}{2\pi} \langle f(x), e^{-i\omega x} \rangle_x, \end{aligned}$$

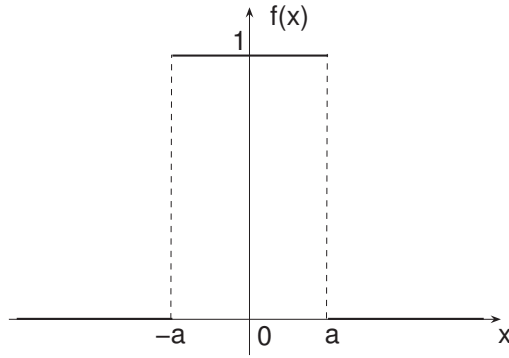
es decir,

$$f_{gen}^{(n)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^n \hat{f}(\omega); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Esta f\u00f3rmula es muy \u00fatil (igual como la f\u00f3rmula an\u00e1loga para la TL) para calcular TF de manera eficiente (sin evaluar integrales)

Ejemplo 1. Sea

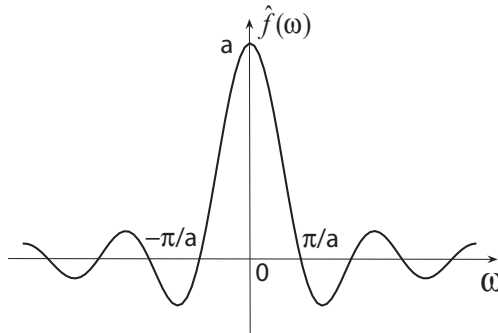
$$f(x) = \begin{cases} 1; & -a < x < a \\ 0; & \text{otro caso.} \end{cases}$$



Tenemos $f'_{gen}(x) = \delta_{-a}(x) - \delta_a(x)$

$$\underset{(6),(7)}{\mathcal{F}} (i\omega)\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}) = \frac{1}{2\pi}2i \operatorname{sen}(a\omega) \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{\pi\omega}.$$

con gráfica



De acuerdo con (3) tenemos $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$. Puede demostrarse que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$, es decir, aquí tenemos un caso donde $f \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ como se enunció arriba.

Observe que $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ en el ejemplo anterior. Esto siempre ocurre cuando f es de soporte compacto porque en (5) podemos tomar las derivadas con respecto a ω según

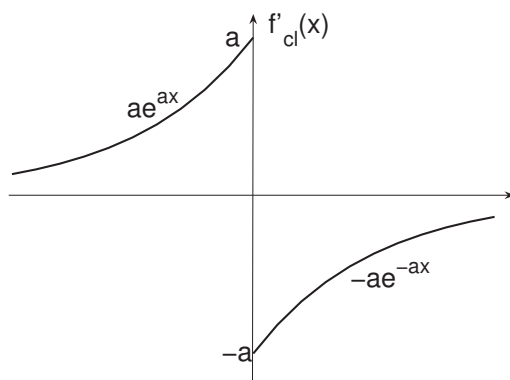
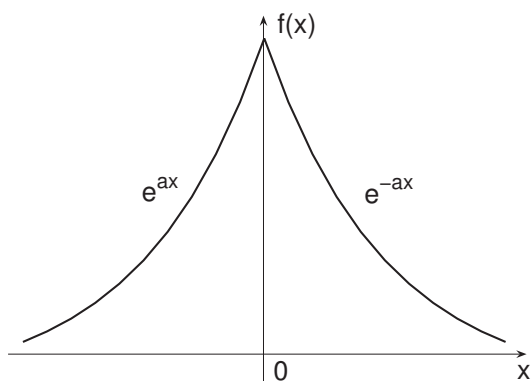
$$\frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \langle f(x), (-ix)^n e^{-i\omega x} \rangle_x = \frac{1}{2\pi} \langle (-1x)^n f(x), e^{-i\omega x} \rangle_x$$

(multiplicación de una distribución con una función C^∞), de modo que según (5) tenemos

$$(-ix)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d^n \hat{f}}{d\omega^n}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Como veremos más adelante, la fórmula (7) vale también para cosas más generales, por ejemplo $f \in L^1(\mathbb{R})$ no necesariamente de soporte compacto.

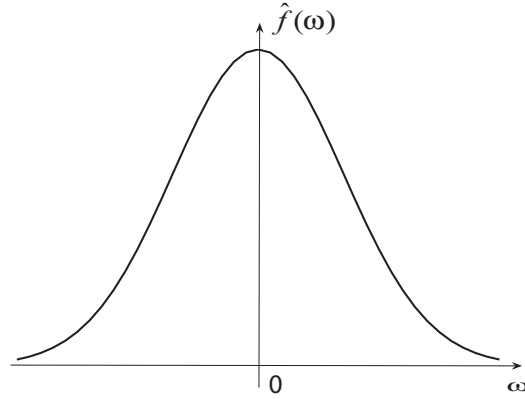
Ejemplo 2. Sea $f(x) = e^{-a|x|}$; $-\infty < x < \infty$ con $a > 0$ una constante. Tenemos $f \in L^1(\mathbb{R})$



$$f''_{cl}(x) = a^2 f(x)$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'_{gen}(x) &= f'_{cl}(x), \quad f''(x) = f''_{cl}(x) - 2a\delta(x) \\ \implies f''_{gen}(x) &= a^2 f(x) - 2a\delta(x) \xrightarrow[(6),(7)]{\mathcal{F}} (i\omega)^2 \hat{f}(\omega) = a^2 \hat{f}(\omega) - \frac{a}{\pi} \\ \implies (a^2 + \omega^2) \hat{f}(\omega) &= \frac{a}{\pi} \\ \implies \hat{f}(\omega) &= \frac{a}{\pi(a^2 + \omega^2)}, \quad \text{es decir (con (1))} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-a|x|} dx &= \frac{a}{\pi(a^2 + \omega^2)}; \quad -\infty < \omega < \infty \end{aligned}$$



Como evidentemente $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ también, la fórmula de inversión (ver (4)) nos da inmediatamente

$$e^{-a|x|} = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{a^2 + \omega^2} d\omega; \quad -\infty < x < \infty$$

Así calculamos dos integrales impropias de “aspecto complicado” con un mínimo de esfuerzo.

Nuestro próximo objetivo será extender la TF a distribuciones. Consideramos nuevamente el caso $f \in L^1(\mathbb{R})$, considerando ahora f como distribución (regular) $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) d\omega \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \right) \varphi(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\omega x} f(x) \varphi(\omega) dx d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \varphi(\omega) d\omega \right) dx \stackrel{(1)}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{\varphi}(x) dx \quad (\text{utilizamos } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \text{ ya que } \varphi \\ &\quad \text{es de soporte compacto}) \\ &\implies \langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle; \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) (f \in L^1(\mathbb{R})). \end{aligned} \tag{9}$$

Este resultado sugiere definir para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ su TF \hat{T} por

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Lamentablemente esta definición no tendrá sentido para todo $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ya que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \not\Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, de modo que el corchete $\langle T, \hat{\varphi} \rangle$ puede no tener sentido para una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

arbitraria (de hecho se puede demostrar que $\hat{\varphi}$ nunca pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, excepto cuando $\varphi = 0$). Vemos entonces que la TF de distribuciones puede ser definido solamente para una cierta subclase de distribuciones. Este subespacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vamos a definir más adelante.

2. El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definimos $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ como el espacio vectorial de todas las funciones complejas en $C^\infty(\mathbb{R})$ que juntos con cualquiera de sus derivadas tiende a 0 más rápido que cualquier exponente de $\frac{1}{|x|}$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ (es decir $|x| \rightarrow \infty$). El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se llama el espacio de las funciones de prueba de decrecimiento rápido (o espacio de las funciones de prueba de Schwartz).

Tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \text{ y} \\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \end{array} \right\} \quad (10)$$

La primera afirmación es evidente por la rapidez del decrecimiento a 0 de $\varphi(x)$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ (lo que garantiza la existencia de $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx$). Demostramos ahora la segunda afirmación. Tenemos $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies x^\ell \varphi(x)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ para todo entero $\ell \geq 0$, por lo tanto según (8) tenemos $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Además, para $\ell, m \geq 0$ enteros,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^{(\ell)}(\omega) &\stackrel{(8)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (-x)^\ell \varphi(x) dx \\ \stackrel{(7)}{\implies} (i\omega)^m \hat{\varphi}^{(\ell)}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (-(x)^\ell \varphi(x))^{(m)} dx = ((-ix)^\ell \widehat{\varphi(x)^{(m)}})(\omega), \end{aligned}$$

función acotada de ω por (3) $\implies |\omega^m \hat{\varphi}^{(\ell)}(\omega)|$ acotada para todo entero $\ell, m > 0 \implies \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, lo que demuestra (10). Tenemos ahora

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \stackrel{(10)}{\implies} \varphi, \quad \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \stackrel{(10)}{\implies} \varphi, \hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$$

\implies es válida la fórmula de inversión (4), es decir,

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{\varphi}(\omega) d\omega; \quad -\infty < x < \infty \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})) \quad (11)$$

y tenemos $\hat{\varphi} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \varphi$. Tenemos entonces:

$$\text{la TF es una biyección } \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (12)$$

Ejemplo 3. Sea $f(x) = e^{-x^2/2}$; $-\infty < x < \infty$ (una campana de Gauss). Esta función pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, calculemos su TF. Tenemos $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$, $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $f(x)$ es solución del PVI

$$\begin{cases} f'(x) + xf(x) = 0; & -\infty < x < \infty \\ f(0) = 1, \end{cases} \quad (13)$$

Tenemos

$$f'(x) + xf(x) = 0 \xrightarrow[(7),(8)]{\mathcal{F}} i\omega \hat{f}(\omega) + i\hat{f}'(\omega) = 0 \implies \hat{f}'(\omega) + \omega \hat{f}(\omega) = 0,$$

y además

$$2\pi \hat{f}(0) \stackrel{1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \quad (\text{patrimonio cultural}).$$

Entonces

$$g(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega)$$

es solución del PVI

$$\begin{cases} g'(\omega) + \omega g(\omega); & -\infty < \omega < \infty \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Este problema tiene la misma forma como (13), por lo tanto por la unicidad de la solución del PVI tenemos

$$g(\omega) = e^{-\omega^2/2},$$

es decir,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2},$$

nuevamente una campana de Gauss. Así $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ también, como debe ser según (12). Via cambio de variable se puede verificar (¡Ejercicio!)

$$e^{-\lambda x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda}}, \quad \lambda > 0.$$

De esto, y con (8) tenemos

$$\begin{aligned} -xe^{-x^2/2} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\omega e^{-\frac{\omega^2}{2}} \\ (x^2 - 1)e^{-x^2/2} &\xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}, \quad \dots \text{ etc.} \end{aligned}$$

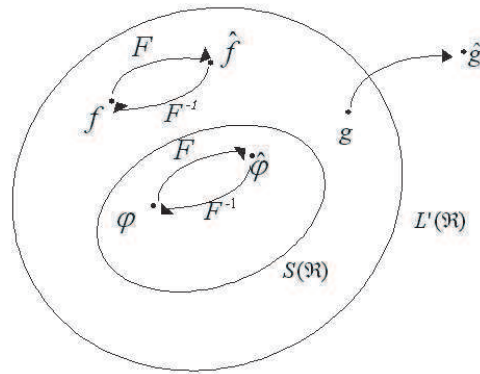
Clase 18: (Continuación)

Peter Hummelgens

12 de diciembre de 2006

1. Transformación de Fourier $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Luego de la clase anterior tenemos la situación siguiente:



Los $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{g} \notin L^1(\mathbb{R})$ no tienen (por ahora) antitransformada y además no es claro si la TF de \hat{g} existe (en algún sentido). Observe que en la figura $\hat{f}, \hat{\phi}$ tienen nuevamente TF ($\widehat{\hat{f}}, \widehat{\hat{\phi}}$), etc. La situación con g de la figura es un defecto de la teoría desarrollado hasta ahora. Queremos tener un espacio de distribuciones en el cual podemos tomar alegremente TF y TF repetidas y anti TF sin salir de este espacio. Sabemos de la TL cómo importante es para las aplicaciones tener siempre una antitransformada.

El nuevo espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donde reina la alegría que acabamos de mencionar debe contener el espacio $L^1(\mathbb{R})$. Procedemos ahora a la definición de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Observemos que evidentemente $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, de modo que cada funcional lineal $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ define por restricción a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ un funcional lineal $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, es decir una distribución. Definimos ahora $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ como

el espacio vectorial de las $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que son extendibles a funcionales lineales $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$. Así $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es un espacio de distribuciones especiales (extendibles a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). El espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ llamamos el espacio de las distribuciones atemperadas (el adjetivo “atemperadas” se explicará más adelante).

Veamos ahora algunos ejemplos de distribuciones atemperadas:

- (a) $L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ya que cada $f \in L^1(\mathbb{R})$ (distribución regular) es extendible a el funcional

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (1)$$

donde ahora φ pertenece al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R})$. La integral converge seguramente porque $f \in L^1(\mathbb{R})$ y además cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ decrece a 0 para $|x| \rightarrow \infty$ más rápidamente que cualquier exponente de $1/|x|$.

- (b) Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ de crecimiento lento (o atemperada), es decir, para ciertas constantes $A, k \geq 0$ se tiene

$$|f(x)| \leq A|x|^k; \quad \text{para } |x| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenemos para cierta constante $B \geq 0$ que $|\varphi(x)| \leq \frac{B}{|x|^{k+2}}$ para $|x| \rightarrow \infty$, por lo tanto $|f(x)\varphi(x)| \leq \frac{AB}{|x|^2}$ para $|x| \rightarrow \infty \implies f\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, de modo que la integral en (1) converge absolutamente para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Por lo tanto para una función $f(x)$ de crecimiento lento, la misma fórmula (1) define f como distribución atemperada. En particular cualquier función acotada define (o es) una distribución atemperada. En particular cualquier función constante es una distribución atemperada.

- (c) Cualquier distribución de soporte compacto es una distribución atemperada, ya que para una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal, $\langle T, \varphi \rangle$ está bien definido para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (es más: para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$).

- (d) $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies T^{(n)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \quad n = 0, 1, 2, \dots$ porque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \varphi^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), luego si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ podemos definir

$$\langle T^n, \varphi \rangle := (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

y $T^{(n)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(e) Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $P(x)$ es un polinomio, entonces $\varphi P \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Luego, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ podemos definir $P(x)T(x)$ por

$$\langle P(x)T(x), \varphi(x) \rangle := \langle T(x), P(x)\varphi(x) \rangle, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (4)$$

y entonces $PT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(f) Sea $f(x) = e^x \operatorname{sen}(e^x)$; $-\infty < x < \infty$. Es claro que $f(x)$ no es una función atemperada. Pero $f(x) = \frac{d}{dx}(\cos(e^x))$ donde $\cos(e^x)$ es acotada, por lo tanto define una distribución atemperada. Por (d) entonces $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Es claro que e^x no pertenece a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ debido a su crecimiento exponencial para $x \rightarrow \infty$. También $h(-x)e^{-x}$ no pertenece a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ debido a su crecimiento exponencial para $x \rightarrow -\infty$. Mencionamos el resultado siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sea } T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \text{ Entonces existen un entero } u \geq 0 \text{ y } f \in C(\mathbb{R}) \text{ atemperada} \\ \text{tal que } T = f_{gen}^{(n)}. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Este resultado caracteriza los elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ como funciones atemperadas o derivadas distribucionales de funciones atemperadas. De aquí que se llama a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ el espacio de las distribuciones atemperadas.

Podemos ahora definir la TF de distribuciones atemperadas. En (g) de la Clase 17 vimos que para $f \in L^1(\mathbb{R})$ tenemos

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (6)$$

Esto nos lleva a definir los TF \hat{T} de una $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ por

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (7)$$

donde ahora el corchete $\langle T, \hat{\varphi} \rangle$ es bien definido ya que sabemos (Clase 17) que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$. El funcional $\hat{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ definido por (6) es lineal ya que para $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}, \varphi + \psi \rangle &\stackrel{(7)}{=} \langle T, \widehat{\varphi + \psi} \rangle = \langle T, \hat{\varphi} + \hat{\psi} \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle + \langle T, \hat{\psi} \rangle \\ &\stackrel{(7)}{=} \langle \hat{T}, \varphi \rangle + \langle \hat{T}, \psi \rangle \quad \text{y} \\ \langle \hat{T}, \lambda\varphi \rangle &\stackrel{(7)}{=} \langle T, \widehat{\lambda\varphi} \rangle = \langle T, \lambda\hat{\varphi} \rangle = \lambda \langle T, \hat{\varphi} \rangle \stackrel{(??.)}{=} \lambda \langle \hat{T}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Así vemos que $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$: la TF no nos lleva fuera de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Además (6) hace ver que la TF de una $f \in L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (dada por $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$) coincide con su TF definida por (7) como elemento $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Aunque posiblemente $\mathcal{F} \notin L^1(\mathbb{R})$, si tenemos $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1. $\delta_a^{(n)}$ es de soporte compacto $\xrightarrow{(c)} \delta_a^{(n)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y tenemos

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\delta_a^{(n)}}, \varphi \rangle &\stackrel{(7)}{=} \langle \delta_a^{(n)}(\omega), \hat{\varphi}(\omega) \rangle = (-1)^n \langle \delta_a(\omega), \hat{\varphi}^{(n)}(\omega) \rangle = ((8) \text{ de la Clase 17}) \\ &= (-1)^n \langle \delta_a(\omega), -(\widehat{ix})^n \widehat{\varphi}(x)(\omega) \rangle \stackrel{(7)}{=} (-1)^n \langle \hat{\delta}_a(\omega), (-i\omega)^n \varphi(\omega) \rangle \\ &= \langle \hat{\delta}_a(\omega), (i\omega)^n \varphi(\omega) \rangle = \langle (i\omega)^n \hat{\delta}_a(\omega), \varphi(\omega) \rangle \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

de modo que

$$\delta_a^{(n)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^n \hat{\delta}_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} (i\omega)^n e^{-ia\omega}; \quad n = 0, 1, 2, \dots (a \in \mathbb{R}), \quad (8)$$

ya que en la Clase 17 encontramos que $\delta_a(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} e^{-ia\omega}$, lo que también podemos obtener de (7):

$$\begin{aligned} \langle \hat{\delta}_a, \varphi \rangle &\stackrel{(7)}{=} \langle \delta_a(\omega), \hat{\varphi}(\omega) \rangle = \hat{\varphi}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \varphi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \langle e^{-iax}, \varphi(x) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle e^{-ia\omega}, \varphi(\omega) \rangle \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

2. Reglas operacionales.

1. $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es un operador lineal, es decir,

$$f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \lambda \in (\mathbb{C}) \implies f + g \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} + \hat{g}, \quad \lambda f \xrightarrow{\mathcal{F}} \lambda \hat{f}$$

Esto es evidente

2. $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R})$ (como ya observamos en la clase sobre la convolución)

y

$$f(x) * g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \quad (9)$$

Demostración :

$$2\pi f(x) * g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\zeta)g(\zeta)d\zeta \right) dx$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\omega(x-\zeta)} f(x-\zeta)g(\zeta)e^{-i\omega\zeta} dx d\zeta = (2\pi)^2 \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega),$$

de donde se sigue (9). \square

Mencionamos sin demostración:

$$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ de soporte compacto, } g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ arbitrario} \implies (9) \text{ es v\u00e1lido} \quad (10)$$

donde observamos que f de soporte compacto, $\implies \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ (ver la Clase 17), de modo que en (9) el producto $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ es bien definido como producto de una funci\u00f3n C^∞ con una distribuci\u00f3n. Otras situaciones donde (9) es v\u00e1lido presentaremos m\u00e1s adelante.

3.

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies f_{gen}^{(n)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^n \hat{f}(\omega); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Demostraci\u00f3n : } f_{gen}^{(n)}(x) = \delta^{(n)}(x) * f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi(i\omega)^n \frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega). \quad \square$$

4.

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies x^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^n \hat{f}_{gen}^{(n)}(\omega); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Demostraci\u00f3n :

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}_{gen}^{(n)}, \varphi \rangle &= (-1)^n \langle \hat{f}(\omega), \varphi^{(n)}(\omega) \rangle \stackrel{(7)}{=} (-1)^n \langle f(\omega), \widehat{\varphi^{(n)}}(\omega) \rangle \\ &\stackrel{(3)}{=} (-1)^n \langle f(\omega), (\omega)^n \hat{\varphi}(\omega) \rangle = (-1)^n \langle (i\omega)^n f(\omega), \hat{\varphi}(\omega) \rangle \\ &= \langle (-i\omega)^n f(\omega), \hat{\varphi}(\omega) \rangle \stackrel{(7)}{=} \langle \widehat{(-ix)^n f(x)}(\omega), \varphi(\omega) \rangle \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\implies (-ix)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}_{gen}^{(n)}(\omega)$$

equivalente con el resultado deseado. \square

5.

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies f(x-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{ia\omega} \hat{f}(\omega); \quad a \in \mathbb{R} \text{ (traslaci\u00f3n en } x\text{)}.$$

Demostración : $f(x - a) = \delta_a(x) * f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \frac{1}{2\pi} e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega) = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$. □

6.

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies e^{iax} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega - a); \quad a \in \mathbb{R} \quad (\text{traslación } \omega).$$

Demostración :

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}(\omega - a), \varphi(\omega) \rangle &= \langle \hat{f}(\omega), \varphi(\omega + a) \rangle \stackrel{(7)}{=} \langle f(\omega), \widehat{\varphi(x+a)}(\omega) \rangle \\ &\stackrel{5.}{=} \langle f(\omega), e^{ia\omega} \hat{\varphi}(\omega) \rangle = \langle e^{ia\omega} f(\omega), \hat{\varphi}(\omega) \rangle \\ &\stackrel{(7)}{=} \langle \widehat{e^{iax} f(x)}(\omega), \varphi(\omega) \rangle \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies e^{iax} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega - a)$. □

7. Para $f \in L^1(\mathbb{R})$, $0 \neq a \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\langle f(ax), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \varphi(x) dx \stackrel{t=ax}{=} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi\left(\frac{t}{a}\right) dt = \langle f(t), \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \rangle$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, lo que nos lleva a definir

$$\langle f(ax), \varphi(x) \rangle := \langle f(x), \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \rangle. \quad (11)$$

Tenemos ahora

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right); \quad 0 \neq a \in \mathbb{R}$$

Demostración : Primero tenemos

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{\varphi}(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1\omega x} \varphi(ax) dx \stackrel{t=ax}{=} \frac{1}{2\pi|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{a}t} \varphi(t) dt = \frac{1}{|a|} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

luego

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f(ax)}(\omega), \varphi(\omega) \rangle &\stackrel{(7)}{=} \langle f(a\omega), \hat{\varphi}(\omega) \rangle \stackrel{(11)}{=} \langle f(\omega), \frac{1}{|a|} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{a}\right) \rangle \\ &= \langle f(\omega), \widehat{\varphi(ax)}(\omega) \rangle \stackrel{(7)}{=} \langle \hat{f}(\omega), \varphi(a\omega) \rangle \\ &= \frac{1}{|a|} \langle \hat{f}(\omega), |a| \varphi\left(\frac{\omega}{1/a}\right) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \varphi(\omega) \rangle \\ &= \langle \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \varphi(\omega) \rangle \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\implies f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

De este resultado en combinación con (5) se obtiene

$$f \in \mathcal{S}''(\mathbb{R}) \implies f(ax + b) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} e^{i\frac{b}{a}\omega} \cdot \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right); \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

□

Clase 19: Continuación

Peter Hummelgens

16 de diciembre de 2006

La función $1(x) := 1; -\infty < x < \infty$ es acotado, por lo tanto define una distribución atemperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. tenemos

$$\begin{aligned} \langle \hat{1}(\omega), \varphi(\omega) \rangle &= \langle 1(\omega), \hat{\varphi}(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \cdot 0 \cdot \omega} \hat{\varphi}(\omega) d\omega = \text{(fórmula de inversión)} \\ &= \varphi(0) = \langle \delta(\omega), \varphi(\omega) \rangle \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de modo que

$$1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\omega) \quad (1)$$

1. La TF inversa.

Definimos $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) (\varphi \rightarrow \check{\varphi})$ por

$$(\overline{\mathcal{F}}\varphi)(\omega) = \check{\varphi}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \varphi(x) dx; \quad -\infty < \omega < \infty (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})). \quad (2)$$

Tenemos para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}$,

$$(\overline{\mathcal{F}}\hat{\varphi})(a) \stackrel{(2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\omega} \hat{\varphi}(\omega) d\omega \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Además

$$\begin{aligned} e^{ia\omega} \hat{\varphi}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-a)} \varphi(x) dx \stackrel{t=x-a}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi(t+a) dt \\ &= \widehat{\varphi(x+a)}(\omega), \end{aligned}$$

de modo que (3) da

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{F}}\hat{\varphi})(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi(x+a)}(\omega) d\omega \\ &= \langle 1(\omega), \widehat{\varphi(x+a)}(\omega) \rangle = \langle \hat{1}(\omega), \varphi(\omega+a) \rangle = \langle \delta(\omega), \varphi(\omega+a) \rangle = \varphi(a), \end{aligned}$$

y como $a \in \mathbb{R}$ era arbitrario comprobamos que

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ y similarmente se demuestra} \\ \text{que } \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi) = \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \end{array} \right\} \quad (3)$$

Por supuesto (3) no es otra cosa que la fórmula de inversión $\hat{\varphi}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{\varphi}(\omega) d\omega$ y (3) dice que $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$. Definimos ahora para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\overline{\mathcal{F}}T = \check{T}$ por

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle := \langle T, \check{\varphi} \rangle; \quad \varphi \in (\mathbb{R}). \quad (4)$$

Es claro que $\check{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y queremos ahora verificar que

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T) = T = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}T), \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad (5)$$

De hecho tenemos $\langle \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T), \varphi \rangle \stackrel{(4)}{=} \langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\varphi) \rangle \stackrel{(3)}{=} \langle T, \varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T) = T$. De manera similar vemos que $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}T) = T$, y comprobemos (5). Como consecuencia podemos decir

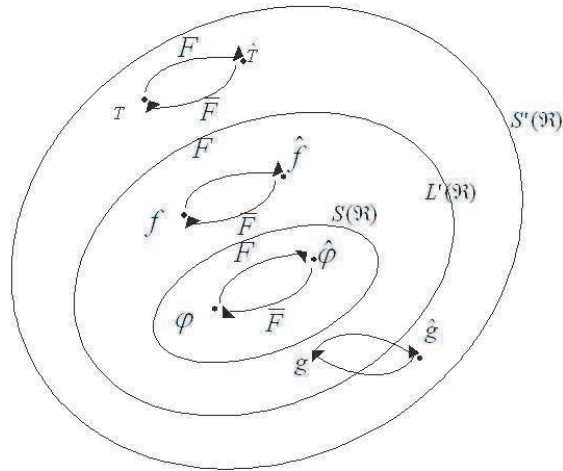
$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{F}\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ es una biyección con inversa} \\ \mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \end{array} \right\} \quad (6)$$

y cada relación $T \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{T}$ es en el mismo momento una relación para la TF inversa $\hat{T} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} T$. Como consecuencia de (5) tenemos para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ que

$$\mathcal{F}T = 0 \iff T = 0 \quad (7)$$

ya que la parte \iff es trivial y $\mathcal{F}T = 0 \implies T \stackrel{(5)}{=} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}T) = \mathcal{F}^{-1}(0) = 0$ (\mathcal{F}^{-1} es lineal).

Hemos llegado ahora a la situación siguiente:



Mejor no se puede: en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ podemos tomar alegremente TF, TF repetidas y TF inversas sin salir nunca de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Para la TF repetida tenemos

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies (\mathcal{F}(\mathcal{F}f))(x) = \frac{1}{2\pi}f(-x) \quad (8)$$

porque

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{\varphi}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} \hat{\varphi}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \varphi(-x)$$

y ahora para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x), \varphi(x) \rangle &= \langle (\mathcal{F}f)(\omega), (\mathcal{F}\varphi)(\omega) \rangle = \langle f(x), (\mathcal{F}(\mathcal{F}f))(x) \rangle \\ &= \langle f(x), \frac{1}{2\pi} \varphi(-x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f(x), \varphi(-x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f(-x), \varphi(x) \rangle \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ lo que demuestra (8).

Ejemplo 1. (a) En la clase 17 vimos que $X_a(x) = \begin{cases} 1 & ; -a < x < a \\ 0 & ; \text{otro } x \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\text{sen}(a\omega)}{\pi\omega}$.

Con (8) tenemos ahora

$$X_a(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\text{sen}(a\omega)}{\pi\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X_a(-x) = \frac{1}{2\pi} X_a(x),$$

por lo tanto

$$\frac{\text{sen}(ax)}{x} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} X_a(\omega), \quad a > 0$$

(en la Clase 17 no teníamos todavía una TF para $\frac{\text{sen}(ax)}{x}$).

(b) Para $a > 0$,

$$e^{-a|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)} \quad (\text{Clase 17}), \text{ y con (8) entonces}$$

$$e^{-a|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi i} e^{-a|\omega|}, \text{ de modo que}$$

$$\frac{2a}{x^2 + a^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-a|\omega|}, \quad a > 0.$$

Dejamos como ejercicio verificar que

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \implies (\mathcal{F}^{-1}f)(\omega) = 2\pi(\mathcal{F}f)(-\omega). \quad (9)$$

El ejemplo anterior sirve para ilustrar (9).

2. La TF en $L^2(\mathbb{R})$.

Tenemos $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, de modo que cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ es Fourier transformable. Un ejemplo de una función en $L^2(\mathbb{R})$ pero no en $L^1(\mathbb{R})$ es $f(x) = \frac{\text{sen}(ax)}{x} = \frac{\text{sen } ax}{x}$ ($a > 0$), cuya TF es (ver el ejemplo anterior) $\frac{1}{2}X_a(x)$. Recordemos que en $L^2(\mathbb{R})$ tenemos un producto interno

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx; \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}). \quad (10)$$

Tenemos el resultado siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \text{ es una biyección, y} \\ \|f\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \|\hat{f}\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(fórmula de Parseval para la TF), y más generalmente

$$(f, g) \stackrel{(10)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega \stackrel{(10)}{=} 2\pi(\hat{f}, \hat{g}) \quad (12)$$

(fórmula de Plancherel-Parseval).

Ejemplo 2. (a) Sea $\hat{f}(\omega) = \frac{\text{sen}\omega}{\omega}$; $-\infty < \omega < \infty$. Del ejemplo anterior sabemos que

$$f(x) = \pi X_1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega)$$

Como $f \in L^2(\mathbb{R})$, tenemos $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ por (11), y por (11) también tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 \omega}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 x^2 dx = \pi,$$

es decir, encontramos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt = \pi,$$

un resultado que costaría mucho más trabajo con los métodos de variable compleja (Mat. VI, integración en el plano complejo, teorema de residuos de Cauchy, ... etc.)

(b) Sea $\hat{f}(\omega) = \frac{1-e^{-i\omega a}}{i\omega}$; $-\infty < \omega < \infty$ ($a > 0$). Tenemos

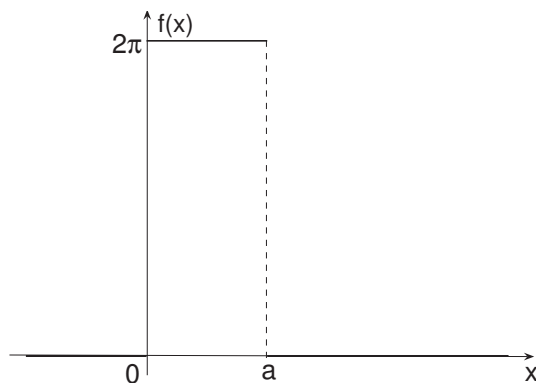
$$i\omega \hat{f}(\omega) = 1 - e^{-i\omega a} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f'_{gen}(x) = 2\pi\delta(x) - 2\pi\delta_a(x)$$

$$\implies f(x) = 2\pi[h(x) - h(x-a)] + c$$

con c una constante. Pero $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{11} f \in L^2(\mathbb{R})$, de modo que necesariamente $C = 0$ es decir,

$$f(x) = 2\pi[h(x) - h(x-a)],$$

con gráfica



Entonces según (12),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|1 - e^{-iat}|^2}{t^2} dt = \frac{1}{2\pi} 4\pi^2 a = 2\pi a, \quad a > 0.$$

Más ejemplos de la aplicación de (11), (12) se presentan en la guía del Profesor P.F. Hummelgens.

Mencionamos sin demostración el resultado siguiente:

Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{-i\omega x} f(x) dx &\xrightarrow{\|\cdot\|} \hat{f}(\omega), \\ \int_{-A}^A e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega &\xrightarrow{\|\cdot\|} f(x) \text{ cuando } A \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

donde la segunda afirmación es una versión de la fórmula de inversión para la TF en $L^2(\mathbb{R})$. Este resultado se llama el teorema de Plancherel. También mencionamos que la fórmula de la convolución es válido en $L^2(\mathbb{R})$:

$$\left. \begin{aligned} f, g \in L^2(\mathbb{R}) &\implies f(x) * g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) \\ \text{donde } \hat{f}\hat{g} &\in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3. TF de distribuciones par o impar.

De (10) de la Clase 18, $\langle f(ax), \varphi(x) \rangle := \langle f(x), \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \rangle$ tenemos $\langle f(-x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(-x) \rangle$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Decimos que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es par (o impar) si, y sólo si, $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par, entonces

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}(-\omega), \varphi(\omega) \rangle &= \langle \hat{f}(\omega), \varphi(-\omega) \rangle = \langle f(\omega), \widehat{\varphi(-x)}(\omega) \rangle = \text{(regla 7., Clase 18)} \\ &= \langle f(\omega), \hat{\varphi}(-\omega) \rangle = \langle f(-\omega), \hat{\varphi}(\omega) \rangle = (f \text{ par}) \\ &= \langle f(\omega), \hat{\varphi}(\omega) \rangle = \langle \hat{f}(\omega), \varphi(\omega) \rangle \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega)$, es decir, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par $\implies \hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par también. Es claro que entonces también \hat{f} par $\implies f$ par. Similarmente podemos proceder para f impar. Finalmente:

$$f(x) \text{ par} \iff \hat{f}(\omega) \text{ par}, \quad f(x) \text{ impar} \iff \hat{f}(\omega) \text{ impar} \quad (15)$$

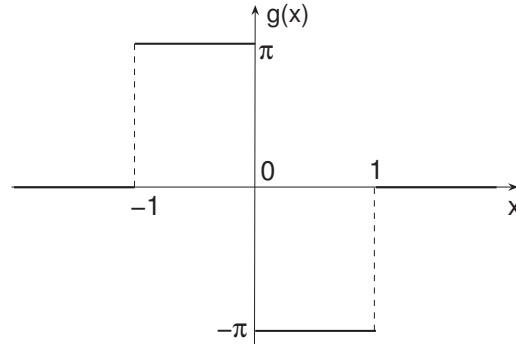
Ejemplo 3. Queremos hallar $f(x)$ cuando $\hat{f}(\omega) = \frac{\cos \omega - 1}{i\omega}$. Tenemos

$$i\omega \hat{f}(\omega) = \cos \omega - 1 = \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) - 1$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f'_{gen}(x) = \pi\delta_{-1}(x) + \pi\delta_1(x) - 2\pi\delta(x)$$

$$\implies f(x) = \pi h(x+1) + \pi h(x-1) - 2\pi h(x) + C \text{ para cierta constante } C. \quad (16)$$

La gráfica de $g(x) = \pi h(x+1) + \pi h(x-1) - 2\pi h(x)$, es



$$\implies g(x) \text{ es impar.}$$

Sumando a $g(x)$ una constante $C \neq 0$ resultará una función no impar. Pero $f(x)$ tiene que ser impar porque $\hat{f}(\omega)$ es impar. Así en (16) tenemos necesariamente $C = 0$
 $\implies f(x) = \pi h(x+1) + \pi h(x-1) - 2\pi h(x)$.

Clase 20: Continuación

7 de enero de 2007

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ par, entonces

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x) dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x) dx,\end{aligned}$$

porque $f(x) \operatorname{sen}(\omega x)$ es impar

$$\implies \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega x) f(x) dx$$

cuando $f \in L^1(\mathbb{R})$ par (observe $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega)$).

Ejercicio 1. Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ (par por (16)) entonces $\hat{f} = 2 \int_0^{\infty} \cos(\omega x) \hat{f}(\omega) d\omega$.

Ejercicio 2. Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, f impar, entonces

$$\hat{f}(\omega) = \frac{-i}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x) dx,$$

$$f(x) = 2i \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) \hat{f}(\omega) d\omega$$

(observe $\hat{f}(-\omega) = -\hat{f}(\omega)$).

1. Aplicaciones de la TF.

La variedad de aplicaciones de la TF tiene semejanzas con las que vimos en la TL.

Ejemplo 1. (a) Puede demostrarse que cada ODLCC tiene una s.f. atemperada. Hallemos una s.f. atemperada de $L = d^2/dx^2 - k^2$ ($k > 0$). Tenemos

$$E''_{gen}(x) - k^2 E(x) = \delta(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2 \hat{E}(\omega) - k^2 \hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\implies \hat{E}(\omega) = -\frac{1/(2\pi)}{\omega^2 + k^2},$$

pero en la Clase 19 encontramos que

$$e^{-a|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)}, \quad a > 0,$$

entonces

$$\hat{E}(\omega) = -\frac{1}{2k} \frac{k}{\pi(\omega^2 + k^2)} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} E(x) = -\frac{1}{2k} e^{-k|x|}; \quad -\infty < x < \infty,$$

una s.f. que ya encontramos en el pasado.

(b) Sea $L = d^2/dx^2 - 3d/dx + 2$, entonces

$$LE(x) = \delta(x) \implies E''_{gen}(x) - 3E'_{gen}(x) + 2E(x) = \delta(x)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} (-\omega^2 - 3i\omega + 2)\hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\implies \hat{E}(\omega) = -\frac{\frac{1}{2\pi}}{(\omega + i)(\omega + 2i)} = \frac{i/2\pi}{\omega + i} - \frac{i/2\pi}{\omega + 2i}. \quad (1)$$

Hallemos la TF de $\hat{g}(\omega) = \frac{i}{\omega + ai}$ ($a > 0$). Tenemos

$$\hat{g}(\omega) = \frac{i}{\omega + ai} \implies \omega \hat{g}(\omega) + ai \hat{g}(\omega) = i \implies -i(i\omega) \hat{g}(\omega) + ai \hat{g}(\omega) = i$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} -ig'_{gen}(x) + aig(x) = 2\pi i \delta(x)$$

$$\implies g'_{gen}(x) - ag(x) = -2\pi \delta(x). \quad (2)$$

La ED $g'_{gen}(x) - ag(x) = 0$ tiene solución general Ce^{ax} , por lo que una solución de (2) debe tener la forma

$$g(x) = \begin{cases} Ae^{ax}; & x < 0 \\ Be^{ax}; & x > 0 \end{cases}$$

para ciertas constantes A, B . Pero para que $g(x)$ sea atemperada es necesario que $B = 0$, luego

$$\begin{aligned} g(x) = Ah(-x)e^{ax} &\implies g'_{gen}(x) = aAh(-x)e^{ax} - A\delta(x) \\ \stackrel{(2)}{\implies} aAh(-x)e^{ax} - A\delta(x) - aAh(-x)e^{ax} &= -2\pi\delta(x) \implies A = 2\pi \\ \implies g(x) &= 2\pi h(-x)e^{ax} \end{aligned}$$

y

$$g(x) = 2\pi h(-x)e^{ax} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{i}{\omega + ai} = \hat{g}(\omega). \quad (3)$$

Verifiquemos (3):

$$g'_{gen}(x) = 2\pi ah(-x)e^{ax} - 2\pi\delta(x) = ag(x) - 2\pi\delta(x)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)\hat{g}(\omega) = a\hat{g}(\omega) - 1 \implies -\omega\hat{g}(\omega) = ai - i \implies \hat{g}(\omega) = \frac{i}{\omega + ai},$$

correcto. Ahora (1), (3)

$$\implies \hat{E}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(-x)[e^x - e^{2x}] = E(x)$$

es s.f. atemperada de L .

Ejemplo 2. Mediante la TF podemos encontrar soluciones atemperadas de ED. Sea la ED

$$u''(x) - u(x) + 2g(x) = 0; \quad -\infty < x < \infty \quad (4)$$

donde $g \in L^1(\mathbb{R})$ una función dada. Suponiendo la existencia de una solución $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, tenemos

$$(1) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2\hat{u}(\omega) - \hat{u}(\omega) + 2\hat{g}(\omega) = 0 \implies (\omega^2 + 1)\hat{u}(\omega) = 2\hat{g}(\omega)$$

$$\implies \hat{u}(\omega) = \frac{2\hat{g}(\omega)}{\omega^2 + 1} = \frac{2\pi}{\pi(\omega^2 + 1)}\hat{g}(\omega)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(x) = g(x) * e^{-|x|},$$

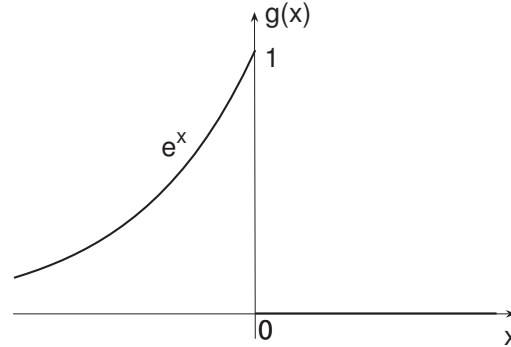
2., Clase 18

(donde utilizamos que $e^{-|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\pi(\omega^2 + 1)}$, ver Clase 17). Como $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $e^{-|x|}$ también pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, $u(x) = g(x) * e^{-|x|}$ es una solución atemperada en $L^1(\mathbb{R})$ de (1).

Ejemplo 3. La TF puede ser útil para hallar productos de convolución. Se pide hallar

$$R(x) = h(x)e^{-x} * h(-x)e^x.$$

Sea $f(x) = h(x)e^{-x}$, $g(x) = h(-x)e^x$. Hallemos $\hat{g}(\omega)$:



$$g'_{gen}(x) = h(-x)e^x - \delta(x) = g(x) - \delta(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega\hat{g}(\omega) = \hat{g}(\omega) - \frac{1}{2\pi}$$

$$\implies \hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi(1-i\omega)} = \frac{i}{2\pi(\omega+i)} \quad \text{hbox(compare con el ejemplo anterior)}.$$

Similarmente encontramos

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)},$$

luego con 2., Clase 18,

$$k(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+\omega^2)} = \hat{k}(\omega)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} k(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|},$$

es decir,

$$h(x)e^{-x} * h(-x)e^x = \frac{1}{2}e^{-|x|}; \quad -\infty < x < \infty.$$

Ejemplo 4. La TF puede ser útil para hallar soluciones atemperadas de EC. Sea la EC

$$h(x)e^{-x} * u(x) = e^{-|x|}; \quad -\infty < x < \infty. \quad (5)$$

Suponiendo la existencia de una solución atemperada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tenemos

$$(5) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega) = \hat{k}(\omega),$$

con $g(x) = h(x)e^{-x}$, $k(x) = e^{-|x|}$. Pero $g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$ (ver ejemplo anterior) y $R(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\pi(\omega^2+1)}$ (Clase 17), luego

$$2\pi\hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega) = \hat{k}(\omega) \implies 2\pi\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\pi(\omega^2+1)}$$

$$\implies \hat{u}(\omega) = \frac{1}{\pi(1-i\omega)} = \frac{i/\pi}{\omega+i} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(x) = 2h(-x)e^x; \quad -\infty < x < \infty$$

(ver el primer ejemplo).

Es importante observar que no es necesario conocer $\hat{k}(\omega)$, porque

$$2\pi\hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega) = \hat{k}(\omega) \implies \frac{1}{1+i\omega}\hat{u}(\omega) = \hat{k}(\omega)$$

$$\implies \hat{u}(\omega) = \hat{\omega} + i\omega\hat{k}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(x) = k(x) + k'_{gen}(x)$$

$$= e^{-|x|} + \begin{cases} e^x; & x < 0 \\ -e^{-x}; & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2e^x; & x < 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases} = 2h(-x)e^{-x}$$

como antes.

A continuación presentaremos aplicaciones a la resolución de problemas iniciales y de valor en la frontera para ED a derivadas parciales.

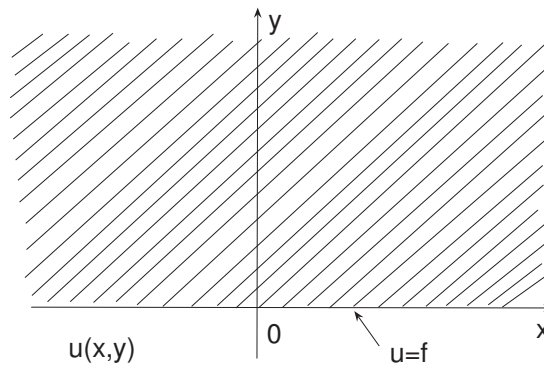
Ejemplo 5. Sea el problema de Dirichlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0 \tag{6}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{7}$$

$$u(x, y) \text{ acotada} \tag{8}$$

donde $f \in L^1(\mathbb{R})$ dada



La condición (8) asegura que para cada $y \geq 0$ fijo $u(x, y)$ es una función atemperada de x , por lo que existe $\hat{u}(\omega, y)$, la TF de $u(x, y)$ con respecto a x . Formalmente,

$$\hat{u}(\omega, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x, y) dx,$$

$$u_{yy}(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x, y) dx \right),$$

es decir,

$$u_{yy}(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\omega, y).$$

Ahora

$$(6) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^2 \hat{u}(\omega) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0, \quad (7) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega),$$

entonces

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \omega^2 \hat{u}(\omega, y) = 0, \quad y \geq 0 \quad (9)$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega). \quad (10)$$

La ED (9) tiene solución general

$$\hat{u}(\omega, y) = A(\omega)e^{-\omega y} + B(\omega)e^{\omega y}; \quad -\infty < \omega < \infty, \quad y \geq 0 \quad (11)$$

la cual es atemperada como función de ω sólo si $A(\omega) = 0$ para $\omega < 0$ y $B(\omega) = 0$ para $\omega > 0$.

$$\underline{\text{Caso } \omega < 0}: \hat{u}(\omega, y) = B(\omega)e^{\omega y} \xrightarrow{(10)} \hat{f}(\omega) = B(\omega)e^0 = B(\omega)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)e^{\omega y}; \quad \omega < 0 \quad (y \geq 0). \quad (12)$$

$$\underline{\text{Caso } \omega > 0}: \hat{u}(\omega, y) = A(\omega)e^{-\omega y} \xrightarrow{(10)} \hat{f}(\omega) = A(\omega)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)e^{-\omega y}; \quad \omega > 0 \quad (y \geq 0). \quad (13)$$

Podemos resumir (12), (13) con una sola fórmula,

$$\hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)e^{-y|\omega|}; \quad -\infty < \omega < \infty, \quad y \geq 0 \quad (14)$$

Como sabemos que $e^{-y|\omega|} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{2y}{x^2 + y^2}$ (ver Clase 19), tenemos con (2), Clase 18

$$(14) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(x, y) = \frac{1}{2\pi} f(x) * \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\pi} f(x) * \frac{1}{x^2 + y^2}$$

(observe que no hace falta de TF $\hat{f}(\omega)$),

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi; \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0. \quad (15)$$

Observación importante: De (14) también tenemos en la fórmula de inversión

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) e^{-y|\omega|} d\omega; \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0, \quad (16)$$

pero para halar la integral es necesario conocer (calcular) $\hat{f}(\omega)$ (posiblemente un problema complicado) y sustituir la expresión para $\hat{f}(\omega)$ en la integral, complicándola aún más en general. En cambio la fórmula de la convolución que produce (15) a partir de (14) evita el cómputo de $\hat{f}(\omega)$ y es por lo tanto preferible en general la forma (15) de la solución (fin de la observación)

Consideramos 2 casos particulares

- (a) Sea $f(x) = e^{iax}$. En este caso (16) es preferible ya que $e^{iax} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta_a(\omega)$ (tenemos $e^{iax} = e^{iax} 1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{1}(\omega - a) = \delta(\omega - a) = \delta_a(\omega)$), por lo tanto

$$u(x, y) \stackrel{16}{=} \langle \delta_a(\omega), e^{i\omega x - y|\omega|} \rangle = e^{-y|a| + iax}; \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0,$$

listo.

- (b) Sea $f(x) = X_1(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otro } x. \end{cases}$. Entonces (15) da una integral fácil:

$$u(x, y) = \frac{y}{x} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{1 - x}{y} \right) + \arctan \left(\frac{1 + x}{y} \right) \right]$$

(!verifique!). Aplicación de (16) daría $\left(X_1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\text{sen } \omega}{\pi \omega} \right)$

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{\text{sen } \omega}{\omega} e^{-y|\omega|} d\omega = (\text{vía } e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \text{sen}(\omega x))$$

y resultando un integrando par) $= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega x) \frac{\text{sen } \omega}{\omega} e^{-y|\omega|} d\omega$, que luce muy complicado.

Clase 21: Continuación

17 de diciembre de 2006

Ejemplo 1. (*Este ejemplo es una preparación para el ejemplo siguiente*)

Sea el problema de hallar $u(x)$ acotada tal que

$$-u''(x) + u(x) = f(x); \quad 0 \leq x < \infty \quad (1)$$

$$u(0) = a, \quad a > 0 \quad (2)$$

donde $f \in C([0; \infty))$ acotada una función dada. Para aplicar la TF es necesario extender el problema a $-\infty < x < \infty$. Definimos extensiones impares de $u(x)$, $f(x)$ por

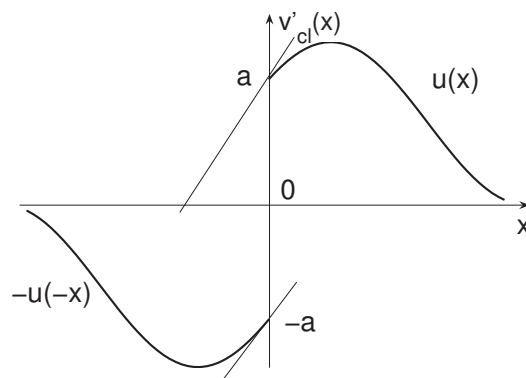
$$v(x) := \begin{cases} u(x); & x > 0 \\ -u(-x); & x < 0 \end{cases} \quad g(x) := \begin{cases} f(x); & x > 0 \\ -f(-x); & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Tenemos

$$v'_{gen}(x) = v'_{cl}(x) + 2a\delta(x), \quad (4)$$

$$v''_{gen}(x) = v''_{cl}(x) + 2a\delta'(x),$$

ya que el salto de $v'_{cl}(x)$ en $x = a$ es 0, como ilustra la figura siguiente



$$v'_{cl}(a-) = v'_{cl}(a+)$$

De (4) tenemos

$$-v''_{gen}(x) + v(x) = -v''_{cl}(x) + v(x) - 2a\delta'(x); \quad -\infty < x < \infty \quad (5)$$

Para $x > 0$ tenemos de (3) que $-v''_{cl}(x) + v(x) = -u''(x) + u(x) \stackrel{(1)}{=} f(x) = g(x)$, $x > 0$, mientras que para $x < 0$ tenemos

$$v'_{cl}(x) = u'_{cl}(-x), \quad v''_{cl}(x) = -u''_{cl}(-x)$$

$$\implies -v''_{cl}(x) + v(x) = u''_{cl}(-x) - u(-x) = -f(-x) = g(x), \text{ entonces,}$$

$$-v''_{cl}(x) + v(x) = g(x); \quad -\infty < x < \infty, \text{ luego por (v),}$$

$$-v''_{gen}(x) + v(x) = g(x) - 2a\delta'(x); \quad -\infty < x < \infty$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} (\omega^2 + 1)\widehat{v}(\omega) = \widehat{g}(\omega) - \frac{ia}{\pi}\omega \implies \widehat{v}(\omega) = \widehat{g}(\omega)\frac{1}{\omega^2 + 1} - \frac{a}{\pi}i\omega\frac{1}{\omega^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} v(x) = \frac{1}{2}g(x) * e^{-|x|} - a(e^{-|x|})'_{gen} =$$

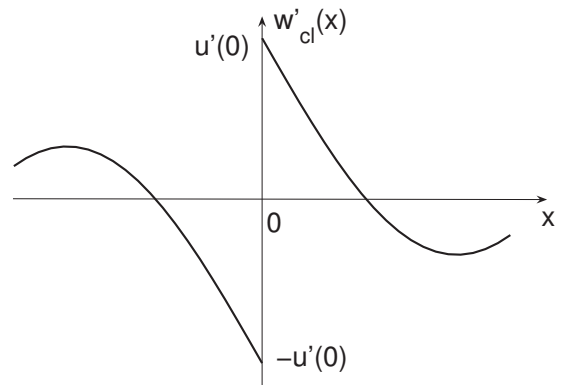
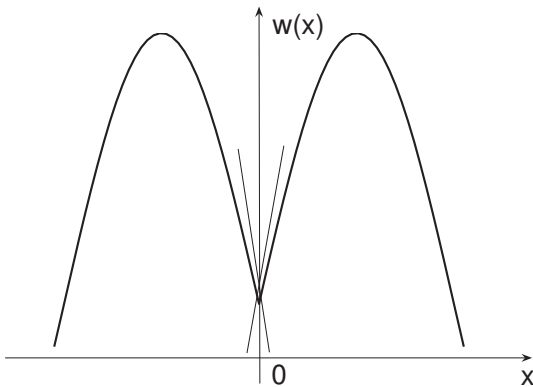
$$\frac{1}{2}g(x) * e^{-|x|} - a \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ -e^x, & x > 0 \end{cases}$$

luego para $x > 0$ (es decir) $v(x) = u(x)$,

$$u(x) = \frac{1}{2}g(x) * e^{-|x|} - ae^{-x}; \quad x \geq 0 \quad (6)$$

solución atemperada del problema.

Veamos ahora porque una extensión par no sirve. Sea $w(x)$ extensión par de $u(x)$



Tenemos ahora $w'_{gen}(x) = w'_{cl}(x)$, $w''_{cl}(x) + 2u'(0)\delta(x)$.

Pero no conocemos el valor de $u'(0)$: no es un dato del problema. Sin embargo, cuando reemplazamos (2) por $u'(0) = b$, entonces, una extensión por si sirve, y se obtiene (¡verifique!) via la TF la solución

$$u(x) = \frac{1}{2}k(x) * e^{-|x|} - be^{-x}; \quad x \geq 0$$

donde $k(x)$ es la solución par de $f(x)$.

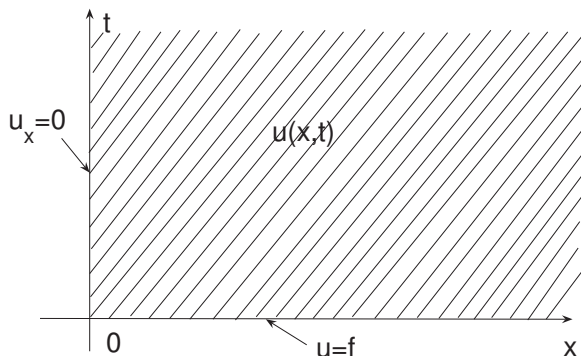
Ejemplo 2. Sea el problema de la conducción de calor en una barra semi infinita dado por

$$u_t = u_{xx}, \quad x, t \leq 0 \tag{7}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \leq 0 \tag{8}$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t \leq 0 \tag{9}$$

donde $f(x) = (1+x)e^{-x}$; $x \leq 0$.



Para aplicar la TF con respecto a la variable x necesitamos extender el problema a todo el semiplano superior $-\infty < x < \infty$, $t \leq 0$. El ejemplo anterior nos indica que para la condición (9) es apropiada una extensión par de $u(x, t)$ en la variable x , poniendo para todo $t \leq 0$ fijo

$$v(x, t) \begin{cases} u(x, t), & x > 0 \\ u(-x, t), & x < 0 \end{cases}$$

y también extender $f(x)$ de manera para. Sea $g(x)$ la extensión par de $f(x)$. Tenemos

$$(v_x)_{gen}(x, t) = (v_x)_{cl}(x, t), \quad (v_{xx})_{gen}(x, t) = (v_{xx})_{cl}(x, t) + 2u_x(0, t)\delta(x)$$

$$\stackrel{(9)}{\implies} (v_{xx})_{gen}(x, t)(v_{xx})_{gen}(x, t) = (v_{xx})_{cl}(x, t), \quad \text{luego}$$

$$(v_{xx})_{gen} - v_t = (v_{xx})_{cl} - v_t \Rightarrow (v_{xx})_{gen}(x, t) = v_t(x, t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} -w^2\widehat{v}(w, t) = \frac{\partial\widehat{v}}{\partial t} \text{ ya que (¡verifique!) } v_t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\partial\widehat{v}}{\partial t}$$

Además $v(x, 0) \stackrel{9}{=} g(x)$, $-\infty < x < \infty \Rightarrow \widehat{v}(w, 0) = \widehat{g}(w)$, y tenemos para cada w fijo el PVI

$$\frac{\partial\widehat{v}}{\partial t} + w^2\widehat{v}(w, t), \quad t \leq 0 \tag{10}$$

$$\widehat{v}(w, 0) = g(w) \tag{11}$$

La ED ((10)) tiene solución general $\widehat{v}(w, t) = A(w)e^{-w^2t}$, luego con (11) $A(w) = \widehat{g}(w)$

$$\implies \widehat{v}(w, t) = \widehat{f}(w)e^{-w^2t}; \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0. \tag{12}$$

A partir de (12) tenemos dos opciones: aplicar la fórmula de inversión o la fórmula de la convolución (2., clase 18).

Con la fórmula de inversión y

$$g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{g}(w) = \frac{2}{\pi(1+w^2)^2} \tag{13}$$

tenemos

$$(12) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} v(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \frac{e^{-w^2t}}{(1+w^2)^2} dw =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(wx) \frac{e^{-w^2t}}{(1+w^2)^2} dw + \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(wx) \frac{e^{-w^2t}}{(1+w^2)^2} dw, \quad \text{donde la segunda integral}$$

es 0 porque $\operatorname{sen}(wx) \frac{e^{-w^2t}}{(1+w^2)^2}$ es función impar de w . Finalmente, porque el integrando en la primera integral es par,

$$v(x, t) = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(wx) \frac{e^{-w^2t}}{(1+w^2)^2} dw; \quad x \geq 0, \quad t \geq 0 \tag{14}$$

es la solución del problema. Pero ¿cómo obtener (13)? Esto es un problema adicional que habría que resolver (ver guía, páginas 6.65,6.66).

Aplicando la fórmula de la convolución evita el problema de hallar $\widehat{g}(w)$. Tenemos

$$(12) \xrightarrow{\mathcal{F}} \underset{2., \text{ Clase 18}}{v(x, t)} = \frac{1}{2\pi} g(x) * k(x), \quad \text{donde } k(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-tw^2}.$$

Pero

$$e^{-tw^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

según un ejemplo de la Clase 17. Entonces

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi, \end{aligned}$$

y utilizando $g(\xi) = f(\xi)$, para $\xi > 0$ y $g(\xi) = f(-\xi)$ para $\xi < 0$ (ya que $g(\xi)$ es extensión para de $f(\xi)$), tenemos

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi t}v(x, t) &= \int_{-\infty}^0 g(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi + \int_0^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^0 f(-\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi + \int_0^{\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi \\ &= (s = -\xi \text{ en primera integral}) \\ &= -\int_{\infty}^0 f(s) e^{-\frac{(x+s)^2}{4t}} ds + \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \\ \implies 2\sqrt{\pi t}v(x, t) &= \int_0^{\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \right] d\xi \end{aligned}$$

y finalmente

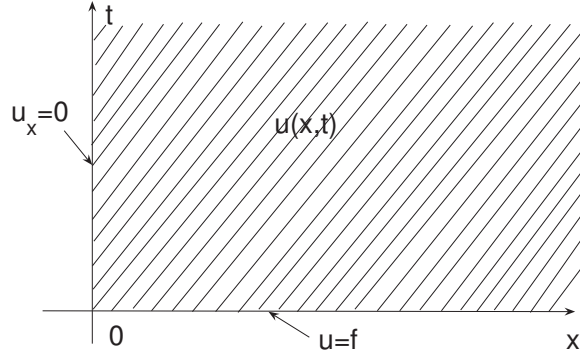
$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \right] d\xi; \quad x, t \geq 0.$$

Ejemplo 3. Consideremos la propagación de ondas transversales en una cuerda infinita, dados la posición inicial $f(x)$ y la velocidad inicial $g(x)$. El problema matemático es

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}; \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \tag{15}$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad -\infty < x < \infty \tag{16}$$

$$u_t(x, 0) = g(x); \quad -\infty < x < \infty \tag{17}$$



Aplicando TF en la variable x obtenemos de (15), (16) el PVI

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + \omega^2 c^2 \hat{u}(\omega, t) = 0; \quad t \geq 0 \quad (18)$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega), \quad \hat{u}_t(\omega, 0) = \hat{g}(\omega) \quad (19)$$

para cada ω fijo. La solución general de (18) (en forma compleja)

$$\hat{u}(\omega, t) = A(\omega)e^{i\omega ct} + B(\omega)e^{-i\omega ct},$$

luego

$$\hat{u}_t(\omega, t) = i\omega c A(\omega)e^{i\omega ct} - i\omega c B(\omega)e^{-i\omega ct}$$

luego con (19) tenemos

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= A(\omega) + B(\omega) \\ \hat{g}(\omega) &= i\omega c A(\omega) - i\omega c B(\omega) \end{aligned} \right\} \implies \text{(resolviendo por } A(\omega), B(\omega))$$

$$\implies A(\omega) = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega) + \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega c}, \quad B(\omega) = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega c},$$

luego

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega, t) &= \frac{1}{2}\hat{f}(\omega) \left(e^{i\omega ct} + e^{-i\omega ct} \right) + \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega c} \left(e^{i\omega ct} - e^{-i\omega ct} \right) \\ \implies \hat{u}(\omega, t) &= \frac{1}{2}\hat{f}(\omega) \left(e^{i\omega ct} + e^{-i\omega ct} \right) + \hat{g}(\omega) \frac{\text{sen}(\omega ct)}{\omega c}. \end{aligned} \quad (20)$$

Con $e^{i\omega ct} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} 2\pi\delta(x+ct)$, $e^{-i\omega ct} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} 2\pi\delta(x-ct)$ (ver la Clase 18) y $\frac{\text{sen}(ct\omega)}{\pi\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} X_{ct}(x)$ (ver la Clase 17), tenemos con 2., Clase 18,

$$(20) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(x, t) = \frac{1}{2}f(x) * [\delta(x+ct) + \delta(x-ct)] + \frac{1}{2c}X_{ct}(x) * g(x)$$

$$\implies u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c}X_{ct}(x) * g(x). \quad (21)$$

Pero

$$X_{ct}(x) * g(x) = \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi \quad (\text{iVerifique!}),$$

de modo que (21) da

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi; \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0,$$

la solución de D' Alembert.